VORLESUNGEN

ÜBER

ALLGEMEINE ARITHMETIK.

NACH DEN NEUEREN ANSICHTEN

BEARBEITET VON

DR. OTTO STOLZ,
ORD. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT ZU INNSBRUCK.

ERSTER THEIL:

ALLGEMEINES UND ARITHMETIK DER REELLEN ZAHLEN.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1885.

Vorwort.

Diejenigen Lehren der Analysis, welche gewöhnlich als der elementare Theil derselben betrachtet werden, sind in der letzten Zeit neu bearbeitet und wesentlich gefördert worden. So bedeutend weichen gegenwärtig die populär-pädagogischen und die wissenschaftlichen Darstellungen der Elemente der Mathematik von einander ab, dafs beinahe jedes Lehrbuch und jedes Colleg über höhere Analysis mit einem Abrisse der Elemente eingeleitet wird. Da jedoch auf diese Weise eine gleichmäfsige, ins Einzelne gehende Behandlung der elementaren Partieen nicht zu erreichen ist, so habe ich es vorgezogen, denjenigen Lehren, deren Gesammtheit als allgemeine Arithmetik und algebraische Analysis bezeichnet wird, systematisch fortschreitende, den gegenwärtigen Stand der Wissenschaft überall berücksichtigende Vorlesungen zu widmen, welche ich hiermit der Öffentlichkeit übergebe.

Die Darstellung in diesem ersten, den reellen Zahlen gewidmeten Theile der Vorlesungen möge durch die folgenden Bemerkungen näher characterisirt werden. — Der Gröfsenbegriff wird nach H. Grafsmann festgestellt, in der Theorie der natürlichen Zahlen ist E. Schröder's mustergiltige Darstellung derselben zu Grunde gelegt. Der 3. Abschnitt, die analytische Theorie der rationalen Zahlen, beruht auf Hankel's Betrachtungen über die Gröfsenverknüpfungen im Allgemeinen, weicht jedoch darin davon ab, dafs auch die Bezeichnungen „gröfser, kleiner" im formalen Sinne gebraucht sind, was Hankel ausdrücklich zurückweist, wiewohl es schon bei Euclid vorkommt. — Als ein wesentliches Merkmal der Gröfsen im Sinne der Alten ist bezeichnet ein von Archimedes hervorgehobenes Axiom, dessen Bedeutung durch die von

P. du Bois-Reymond aufgestellten „Unendlich der Functionen“ erkannt worden ist. Das stetige Gröſsensystem wird nach G. Cantor erklärt, mit dessen Angaben meine eigene, auf R. Dedekind's Schrift: „Stetigkeit und irrationale Zahlen (1872)“ fuſsende Untersuchung zusammentrifft. Die Euclidschen Verhältnisse, das Vorbild der abstracten Gröſsensysteme, finden eingehende Würdigung.

Die Lehre von den irrationalen Zahlen ist nach E. Heine und G. Cantor entwickelt und auf sie die von den Potenzen, Wurzeln und Logarithmen gegründet. Der 9. Abschnitt führt diejenigen Begriffe und Sätze aus der Theorie der Functionen von reellen Veränderlichen, zumeist nach Cauchy und Weierstraſs, vor, welche zur strengen Darstellung der Lehre von den Kreisfunctionen unentbehrlich sind und schlieſst mit einer Theorie von unendlich kleinen Gröſsen, welche wirklich nach dem schon dem Alterthume bekannten Verfahren der Gröſsenbildung entworfen ist und zugleich eine treffende Erläuterung der allgemeinen Sätze des 3. Abschnittes bildet. Der 10. Abschnitt beschäftigt sich mit den unendlichen Reihen und legt die wichtigsten von Cauchy, Abel, Dirichlet, Seidel, Weierstraſs, P. du Bois-Reymond u. A. hinsichtlich ihrer Convergenz und des Rechnens mit ihnen gewonnenen Resultate dar, welche dann bei Entwickelung der Exponential- und anderer Functionen in Potenzreihen benutzt werden.

Innsbruck, im Mai 1885.

O. Stolz.

Inhalt.

I. Abschnitt.

Einleitung.

1. Die Grundlage der reinen Mathematik bildet das Rechnen, d. i. die Verknüpfung der Gröſsen.

Die Bezeichnung „Gröſse (μέγεϑος)“ kommt in Euclid's Elementen vor, doch ihren Begriff erklärt er nirgends. Nach ihm sind als Gröſsen zu betrachten die begrenzten geometrischen Gebilde: Linien, Winkel, Flächen, Körper; jedoch wol auch die natürlichen Zahlen.[1]) Allen gemeinsam sind die folgenden Merkmale, auf denen das Rechnen mit ihnen beruht: man kann die gleichartigen unter ihnen vergleichen, addiren, subtrahiren und im Allgemeinen jede Gröſse in mit ihr gleichartige Theile zerlegen. Den Gröſsen stellt die Geometrie der Alten die geometrischen Verhältnisse gegenüber, obwol sie selbst auch ihnen das erste der obigen Merkmale beilegt, wozu, wie wir sehen werden, die übrigen treten können. Indem wir von den geometrischen Gröſsen, der natürlichen Zahl und dem Euclid'schen Verhältnisse zur nächst höheren Gattung aufsteigen, gelangen wir zur absoluten Gröſse im engern Sinne (vgl. V. 1). Nichts hindert, noch allgemeinere Begriffe aufzustellen. Wenn wir nur das erste aus der obigen Gruppe von Merkmalen festhalten, so ergiebt sich der weiteste Begriff, von welchem auch H. Graſsmann ausgeht. Geben wir ihm den Namen „Gröſse“, so wird ein Gröſsenbegriff ein Begriff von der Art sein, daſs je zwei der darunter enthaltenen Dinge entweder als gleich oder als ungleich erklärt sind. Mit andern Worten: „Gröſse heiſst ein jedes Ding, welches einem anderen gleich oder ungleich gesetzt werden soll.“[2]) Alle Dinge, die mit einem Dinge verglichen sind, heiſsen gleichartige (homogene) Gröſsen und bilden ein Gröſsensystem. — Die Gröſsen werden mit Buchstaben bezeichnet, insbesondere sollen $a\ b\ c \ldots$ im Folgenden Gröſsen eines Systemes bedeuten.

2. Man sagt: „Gleich heiſsen zwei Dinge, wenn man in jeder Aussage statt des einen das andere setzen kann.“ Darüber ist Folgendes zu bemerken. Nachdem die Erklärung abgegeben ist, daſs zwei gegebene Dinge als gleich zu betrachten seien, hat man nachzuweisen, daſs sie einander vertreten können. Daſs das gelten soll für jedes Urtheil, ist offenbar zu viel verlangt, indem zwei Dinge nicht in jedem Merkmale übereinstimmen können. In der That kommt es hier nur darauf an, daſs das eine Ding das andere in den Formeln und Ausdrücken ersetzen könne.

Daſs a gleich b ist, wird kurz durch die Gleichung $a = b$ bezeichnet. $=$ ist das Zeichen der Gleichheit, $a\ b$ die Seiten der Gleichung. Daſs unter zwei ungleichen Gröſsen $a\ b$ die erstere die gröſsere (kleinere) heiſst, bezeichnet man durch die Ungleichung $a > b$ ($a < b$), deren Seiten die verglichenen Gröſsen genannt werden. Formel und Relation sind gemeinsame Namen für die Gleichungen und Ungleichungen. Unter entsprechenden oder simultanen Relationen z. B. $a \gtrless b \quad a' \gtrless b'$ wird verstanden, daſs neben $a > b \quad a' > b'$ und neben $a < b \quad a' < b'$ sein muſs.

Unter einer eindeutigen Verknüpfung der Gröſsen $a\ b\ c \ldots$ versteht man eine Regel, nach welcher entweder jeder oder doch einigen Zusammenstellungen $a\ b$ je eine Gröſse c dieses oder eines anderen Systemes zugeordnet wird. Allgemeine Zeichen, die jede beliebige Verknüpfung bedeuten können, sind $\circ$ $\odot$ u. dgl.[3]) Man schreibt $a \circ b = c$ und liest: „a mit b ist c“. — Man kann jede Gröſse beliebig oft setzen, wie die Begriffe der Logik. So geht es an, nachdem a mit b verknüpft ist, a dennoch mit einer dritten Gröſse b' zu verknüpfen; auch läſst sich a mit sich selbst verknüpfen. Zur Vermeidung von Unterscheidungen betrachtet man das erstere als einen besonderen Fall der Verknüpfung von b, b' mit zwei gleichen Gröſsen $a = a'$. In diesem Sinne sagt man wol: „Jede Gröſse ist sich selbst gleich.“ — Im Falle, daſs die Verknüpfung $\circ$ auf Gröſsen des gegebenen Systemes führt, kann man eine Gröſse a fortschreitend mit mehreren Gröſsen des Systemes $b c \ldots z$ verknüpfen, d. h. man verknüpfe zuerst a mit b, das Ergebnis $a \circ b$ mit c u. s. f. — Wenn die als Resultat der Verknüpfung zweier Gröſsen $a\ b$ erklärte Gröſse $a \circ b$ bei einer Verknüpfung zu verwenden ist, so hat man $a \circ b$ in Klammern zu setzen. Das Resultat der fortschreitenden Verknüpfung $\circ$ von a mit $b c \ldots z$ wird aber anstatt mit $(.((a \circ b) \circ c).) \circ z$ mit $a \circ b \circ c \circ \ldots z$ bezeichnet. — Die Darstellung einer Gröſse durch andere mittelst der Verknüpfungs- oder Rechenzeichen heiſst ein Ausdruck.

Zufolge des Vorstehenden muſs die Erklärung, welche festsetzt, wann je zwei der Gröſsen $a\ b\ c \ldots$ als gleich oder als ungleich anzusehen seien, folgenden Bedingungen Genüge leisten.

1) Wenn gemäſs der Erklärung $a = b$ ist, so muſs eben deswegen $b = a$ sein. Desgleichen wenn a und b ungleich sind, so auch b und a.

2) Je zwei Gröſsen des Systemes müssen entweder gleich oder ungleich sein.

3) Wenn der Erklärung zufolge $a = b\ \ b = c$, so muſs eben deswegen $a = c$ sein. — Corollare. 1) Wenn von einer Reihe von Gröſsen bekannt ist, daſs jede der folgenden gleich ist, so sind irgend zwei derselben einander gleich. — 2) Ist $a = b$, b und c ungleich (oder: sind a und b ungleich, $b = c$), so sind a und c ungleich. (Beweis indirect.)

4) Stets wird angenommen, daſs wenn $a \circ b = c$ und $c = c'$, auch c' als Ergebniſs der Verknüpfung $\circ$ von a mit b angesehen werden darf: $a \circ b = c'$. Zu zeigen aber ist: das Ergebniſs einer jeden eindeutigen Verknüpfung von zwei Gröſsen bleibt ungeändert oder geht nur in eine ihm gleiche Gröſse über, wenn man eine oder beide Gröſsen durch ihnen gleiche ersetzt. D. i. Neben $a = a'\ \ b = b'$ muſs $a \circ b = a' \circ b'$ sein. — Corollar. Wenn $a = a'\ \ b = b'\ \ c = c' \ldots$, so ist

$$a \circ b \circ c \circ \ldots = a' \circ b' \circ c' \circ \ldots$$

Ob die letzte Forderung erfüllt ist, wird sich erst nach und nach erweisen lassen in dem Maaſse, als eindeutige Verknüpfungen der betrachteten Grössen in Betracht gezogen werden. Die Arithmetik bedarf deren nur vier: Addition, Subtraction, Multiplication, Division. Das Zeichen der Addition ist $+$, das der Subtraction $-$, das der Multiplication $\times$ oder $\cdot$ oder blosse Nebeneinanderstellung der beiden zu verknüpfenden Grössen, das der Division : oder der Bruchstrich. Es giebt keine allgemeine Definition für diejenigen Verknüpfungen, welche mit den Namen Addition oder Multiplication belegt werden; diese Bezeichnungen werden vielmehr nur nach gewissen formalen Gesichtspunkten angewendet (vgl. III. 16). — Wenn nun für jede der vier Rechnungsarten die Forderung 4) als erfüllt erwiesen ist, so wird fernerhin nur eine solche Verknüpfung der Grössen $a\,b\,c\ldots$ als eindeutig bezeichnet, deren Ergebnisse sich nicht ändern, wenn die beiden zusammentretenden Grössen durch ihnen gleiche ersetzt werden.

So lange als der vierten Forderung nicht in dem etwa beabsichtigten Umfange Genüge geleistet ist, hat man die Unterscheidung von gleichen Grössen, wenn sie überhaupt möglich ist, zu beachten. Wenn das aber geschehen ist, so kann man in allen mittelst der bezüglichen Rechenzeichen gebildeten Ausdrücken und Formeln für eine Grösse jede ihr gleiche setzen, was demnach als eine selbstverständliche Erweiterung der vorzutragenden Sätze angesehen werden darf.

3. Wenn von je zwei ungleichen Grössen $a\ b$ die eine als die grössere von der andern als der kleineren unterschieden werden soll, so müssen auch dafür eigene Definitionen aufgestellt werden. Die Prädicate „grösser, kleiner" dürfen nur so ertheilt werden, dass kein Verstoss eintritt gegen solche Sätze, welche bei anschaulich ausführbarer Vergleichung beobachtet werden. Es können aber diese Sätze formal zurückgeführt werden auf die folgenden, welche somit notwendige Bedingungen darstellen, denen die Definitionen der grösseren und kleineren Grösse zu entsprechen haben.

1) Wenn nach der einen Definition $a > b$, so muss nach der anderen $a < b$ sein und umgekehrt.

2) Von je zwei ungleichen Grössen muss die eine als die grössere, die andere als die kleinere erklärt sein. D. h.

die unter den Gröſsen $a\,b\,c\ldots$ aufgestellte Disjunction: gleich, gröſser, kleiner muſs sich auf alle Paare $a\ b$ erstrecken, d. i. vollständig sein.

3) Wenn $a = b\ b > c$, so muſs $a > c$ sein.

4) Wenn $a > b\ b > c$, so muſs $a > c$ sein.

Daraus ergeben sich in der That die übrigen vier Sätze über die Vergleichung von zwei Gröſsen $a\ c$, deren Beziehungen zu einer dritten b bekannt sind. — a) „Neben $a < b$ $b = c$ ist $a < c$". — Denn aus $c = b\ b > a$ folgt nach 3) $c > a$ also nach 1) $a < c$. Auf dieselbe Art findet man aus 4): b) „Neben $a < b\ b < c$ ist $a < c$". c) Daſs „wenn $a = b$ $b < c$ $a < c$ ist", wird indirect bewiesen. Wäre nämlich $a \geqq c$, so hätte man simultan $a > b$, was der Voraussetzung widerspricht. Daraus folgt wie a) aus 3) d) „Wenn $a > b$ $b = c$, so ist $a > c$".

Wenn zwischen zwei Gröſsen mehr als eine eingeschaltet ist, so schafft man zunächst die Gleichungen weg. Fehlen aber solche, so ist die mittelbare Vergleichung nur in der folgenden Form möglich: „Wenn die entsprechenden Ungleichungen $a \gtrless b,\ b \gtrless c \ldots\ldots y \gtrless z$ bestehen, so hat man auch $a \gtrless z$."

Die Erfüllung der vorstehenden Forderungen berechtigt jedoch noch nicht dazu, die in Rede stehenden Definitionen zuzulassen. Vgl. III. 15. Es tritt jedenfalls noch die folgende hinzu:

5) „Wenn $a > a'\ \ b > b'$, so darf die Summe $a + b$ weder kleiner als $a' + b$, noch kleiner als $a + b'$ sein."

Es springt in die Augen, daſs wenn die Forderungen 1)—5) erfüllt sind, sie es auch noch bleiben, wenn man die Prädicate „gröſser, kleiner" vertauscht. Eine allgemeine hier entscheidende Bedingung läſst sich jedoch nicht formuliren.

4. Es wurde bereits angedeutet, daſs die Begriffe „gleich, gröſser, kleiner" aus der sinnlichen Wahrnehmung stammen. Wird die Vergleichung und Verknüpfung von Gröſsen anschaulich vollzogen, so erscheinen die Forderungen von Nr. 3 und 4 unmittelbar erfüllt. In der That führt Euclid einen Theil dieser Sätze als κοιναὶ ἔννοιαι auf, die eines Beweises nicht bedürfen (s. V. 1). Die Vergleichungen, die in der

Mathematik vorzunehmen sind, lassen jedoch häufig nur die formale Auffassung zu. Willkürlich ersonnene Dinge einer Art werden verglichen nach einem von Fall zu Fall festzusetzenden Verfahren, wobei nur auf die obigen Forderungen Rücksicht zu nehmen ist. Dafs gerade sie aufgestellt sind, hat offenbar darin seinen Grund, dafs aus ihnen die als Corollare bezeichneten Sätze mit Notwendigkeit hervorgehen.

Es ist gewifs merkwürdig, dafs schon im 5. Buche der Euclid'schen Elemente das soeben erwähnte Verfahren benutzt ist, um eine neue Art abstracter Gröfsen, die Verhältnisse, einzuführen. Unter dem überwältigenden Eindrucke des algebraischen Formalismus wurde in den letzten Jahrhunderten diese Euclid'sche Methode nicht gehörig gewürdigt; sie hätte vor den bei Aufstellung der unendlich kleinen Gröfsen begangenen Irrthümern bewahren können.

Die Unterordnung mehrerer Begriffe unter einen allgemeineren gilt in jeder Wissenschaft als ein Fortschritt. Mit Recht betrachten wir daher gegenwärtig als specielle Fälle der Gleichheit (*ἰσότης*): die *ταυτότης* oder *ὁμοίοτης* der Euclid'schen Verhältnisse, die Aequivalenz der Flächen nach Legendre, die Aequipollenz der Strecken nach Bellavitis. Es wird in jedem dieser Fälle nur die Vergleichung an einer andern Art von Objecten vollzogen.

5. Unter den Begriff der Gröfse fallen die verschiedenen Arten von Zahlen. Der Zahlbegriff ist im Laufe der Zeiten schrittweise erweitert worden. Bei den Alten auf die natürliche Zahl beschränkt, wurde das Wort Zahl in der neueren Zeit (z. B. von Newton und noch von Cauchy) nur im Sinne von absoluter Zahl gebraucht. Gegenwärtig sind die Bezeichnungen „negative, reelle, complexe Zahl" schon in weiten Kreisen verbreitet.

Ein Zahlensystem ist ein System von Gröfsen, welche sich mit Hilfe einer endlichen Anzahl von Zeichen, deren jedes beliebig oft verwendet werden darf, darstellen lassen. Dasselbe heifst geschlossen, wenn die Verknüpfungen unter den ihm angehörigen Zahlen wieder auf solche Zahlen führen.

Ein Gröfsensystem wird durch ein Zahlensystem dargestellt, wenn es möglich ist, jeder Gröfse eine Zahl des Systemes zuzuordnen und umgekehrt. Die hierzu erforderliche Regel mufs jedenfalls so beschaffen sein, dafs gleichen Gröfsen gleiche Zahlen entsprechen und umgekehrt. — Solche Gröfsen kann man Zahlgröfsen nennen. Wir wollen dafür die Bezeichnung „Gröſse“ so lange beibehalten, als von der soeben erwähnten Darstellung derselben abgesehen wird.

6. Ausgehend von den natürlichen Zahlen gelangt man zunächst zu dem geschlossenen Systeme der rationalen Zahlen, welches noch einer zweimaligen, dann aber keiner ferneren Erweiterung in dem Sinne fähig ist, daſs das System geschlossen und die Gesammtheit der Rechnungsregeln erhalten bleibt. So werden wir zuerst zum System der reellen, hernach zu dem der gemeinen complexen Zahlen geführt, dessen Entwickelung die eigentliche Aufgabe der allgemeinen Arithmetik bildet. Hierbei kann man sowol analytisch als synthetisch vorgehen. Wie man es auch machen mag, stets lassen sich in dieser Entwickelung zwei scharf getrennte Stufen unterscheiden. Die synthetische Darstellung schreitet von den discreten zu den stetigen Gröſsen fort. Bei der analytischen gehen wir, nachdem jede rationale Zahl durch eine endliche Anzahl von Zeichen erklärt ist, dazu über, eine unbegrenzte, aber gesetzmäſsig fortschreitende Folge solcher Zahlen in gewissen Fällen durch ein Zeichen auszudrücken. Man hat diesen Vorgang als die Einführung des Unendlichen in die reine Mathematik bezeichnet und ihn als den eigentlichen Wendepunkt in der systematischen Entwickelung derselben erklärt. In der That bieten, nachdem die Lehre von den irrationalen Zahlen begründet ist, alle anderen Grenzprocesse keine theoretische Schwierigkeit mehr dar. Besonders enge schlieſst sich daran die Lehre von den unendlichen Reihen, so daſs ihre Aufnahme in diese Vorlesungen passend erschienen ist. Zugleich sind wir dadurch in Stand gesetzt, die Behandlung jener elementaren Functionen, welche in der allgemeinen Arithmetik von jeher betrachtet worden sind, strenge d. h. weder populär, noch aphoristisch durchzuführen.

7. Das Hauber'sche Theorem über die Umkehrbarkeit der Sätze.[4]) Da bei mathematischen Untersuchungen häufig die Frage nach der Umkehrung von Sätzen auftritt, so ist es zweckmäſsig, ein für alle Male einen Fall hervorzuheben, in welchem sie stets zulässig ist.

Satz. „Bilden die Fälle $A, A' \ldots A^{(n)}$ eine vollständige Disjunction d. h. die Gesammtheit der Möglichkeiten, bedeuten ferner $B, B' \dots B^{(n)}$ eben so viele von einander verschiedene Fälle und weiſs man, daſs wenn A eintritt, B zutrifft; wenn A', so $B' \dots$; wenn $A^{(n)}$, so $B^{(n)}$; so kann man schlieſsen, daſs aus B umgekehrt A, aus B' $A' \dots$, aus $B^{(n)}$ $A^{(n)}$ folgt."

Der Satz ist leicht zu beweisen. Dem B muſs einer der Fälle $A, A' \dots A^{(n)}$ entsprechen wegen ihrer Vollständigkeit. Es kann aber weder $A', \dots$ noch $A^{(n)}$ sein, indem aus diesen ja beziehentlich $B' \dots B^{(n)}$ folgen. Also muſs dem B A entsprechen. — Auf ähnliche Weise wird geschlossen, daſs auch die Disjunction $B, B' \dots B^{(n)}$ vollständig sein muſs.

Offenbar gilt der Satz auch dann noch, wenn die Reihen $A, A' \dots$ und $B, B' \dots$ unbegrenzt sind und jedem A ein und nur ein B entspricht. — Ein Beispiel hierzu findet man II. 10.

II. Abschnitt.

Die natürlichen Zahlen.

1. Das Zählen setzt die Vergleichung der Vielheiten voraus. — Unter Vielheit versteht man eine Menge von unter sich gleichen Gegenständen d. h. den Inbegriff von disjuncten Dingen, deren Verschiedenheiten jedoch nicht beachtet werden, ohne Rücksicht auf ihre Anordnung.

„Zwei Vielheiten heifsen einander gleich, wenn sich jedem Dinge der ersteren je eines der letzteren zuordnen läfst und keines von dieser unverbunden bleibt.“

„Gröfser von zwei Vielheiten heifst diejenige, von welcher, nachdem jedes Ding der anderen (kleineren) je einem von ihr zugeordnet ist, noch einige Dinge (ein Rest) unverbunden bleiben.“

Zunächst erhebt sich die Frage, ob die in den beiden Definitionen vorausgesetzten Beziehungen zweier Vielheiten einander ausschliefsen. [1]) D h. hat man z. B. gefunden, dafs die in einer Menge enthaltenen Dinge sich mit denen einer anderen ohne Rest paaren lassen, wird dann nach Aufhebung der Paarung der zweierlei Dinge und Wiederholung des Versuches das nämliche Resultat sich ergeben oder werden vielleicht jetzt von der einen von beiden Mengen einige Dinge unverbunden bleiben? Dafs notwendig ersteres eintreten mufs, kann so geschlossen werden. Die Dinge der ersten Vielheit mögen in der Anordnung, welche sie am Ende des ersten Versuches einnehmen, mit A, die der zweiten mit B bezeichnet werden. Wir wollen diese Anordnungen dadurch fixiren, dafs wir an die in jedem Paare befindlichen Gegenstände ein und dasselbe, übrigens willkürliche Zeichen z. B. α, β, γ . . . anbringen. A', B' seien die Dinge der ersten und zweiten Vielheit in den Anordnungen nach Schlufs des zweiten Versuches, deren jede mit Hilfe der soeben eingeführten Zeichen beschrieben werden kann. Bringen wir nun die erste Menge in die Anordnung A', während die zweite in der ursprünglichen B belassen wird, so müssen die beiderlei Dinge wieder ohne Rest gepaart sein. Das ist sicher richtig, wenn die Anordnung A' aus A dadurch hervorgeht, dafs ein und nur ein Paar von Dingen, z. B. die mit α β bezeichneten, ihre Plätze wechseln. Denkt man sich nämlich die übrigen dasselbe Zeichen tragenden Dinge fest mit einander verbunden und verknüpft β in A mit α in B, so bleibt in A noch α, in B noch β frei, welche man schliefslich noch zu verbinden hat. Man kann aber jede beliebige Anordnung A' aus A dadurch ableiten, dafs nacheinander je zwei Dinge vertauscht werden. — Die nochmalige Anwendung desselben Schlusses zeigt, dafs auch in den Anordnungen A' B' die Dinge der ersten mit denen der zweiten Art ohne Rest gepaart seien.

Ebenso sind auch die übrigen Bedingungen in I. 2, 3 erfüllt.

2. Die natürliche (ganze absolute) Zahl. Das gemeinsame Merkmal aller Vielheiten, welche einer bestimmten gleich sind, wird durch ein Grundzahlwort ausgedrückt. Man vergleicht die Vielheiten mit den durch beständige Wiederholung eines Striches: 1 (eine Eins, ein Einer) entstandenen: 11, 111 ... (diese Zeichen sind für die Zahlen eilf, einhunderteilf ... erst später einzuführen). Jedes der wiederholten Setzung fähige Ding heifst eine benannte Einheit, nur 1 die Einheit schlechtweg. Die natürliche Zahl ist eine Vielheit von Einheiten d. i. Einern. Jede andere Vielheit heifst eine benannte Zahl. Jeder solchen Vielheit entspricht nämlich eine ihr gleiche natürliche Zahl, welche gefunden wird, indem man von den der Vielheit angehörigen Einheiten eine nach der andern herausgreift, sie mit dem Striche 1 abbildet und hierauf bei Seite legt. Unter sich gleichen Vielheiten entsprechen gleiche Zahlen, der gröfseren Vielheit die gröfsere Zahl.

Von gleichen natürlichen Zahlen kann man nur insofern sprechen, als man sich irgend eine solche Zahl, wie jeden Begriff, beliebig oft gesetzt denken kann. Arithmetisch besteht zwischen ihnen kein Unterschied, so dafs die Sätze 4) in Nr. 4 und 6, 1) in Nr. 5 und 8 trivial sind, während sie für andere Zahlenarten sich nicht von selbst verstehen, da gleiche Zahlen vermöge ihrer Definition verschiedenen arithmetischen Ausdruck haben können (z. B. $^2/_3$ und $^4/_6$).

In diesem Abschnitte bedeutet „Zahl“ stets soviel als „natürliche Zahl.“ Solche Zahlen werden wir im Folgenden mit $a, b, c \ldots$ bezeichnen.

3. Addition der natürlichen Zahlen. Es seien $A, B, C \ldots$ Vielheiten einer Benennung, $A', B', C' \ldots$ des-

gleichen. Fügt man B zu A, so entsteht eine neue Vielheit, welche neben den Einheiten von A die von B enthält und daher gröfser als A ist. Man bezeichnet sie als die Summe der Glieder A und B: $A + B$. Sie ist gleich der Summe $B + A$, sowie $A' + B'$, wenn $A = A'$ $B = B'$. Ist $A > A'$ $B = B'$, so hat man $A + B > A' + B'$. — Man findet ferner $A + (B + C) = (A + B) + C$; denn es befinden sich beiderseits die Einheiten von A B C und nur diese. Auf dieselbe Art ergiebt sich allgemein das erste, associative Gesetz der Verknüpfung $+$ der Vielheiten: „Man erhält eine der Summe $A + B + C + \ldots$ d. i. dem Resultate der fortschreitenden Addition der Vielheiten $A\,B\,C\ldots$ (vgl. I. 2) gleiche Vielheit, in welcher Weise auch die Glieder $A\,B\,C\ldots$ vorher, ohne diese Anordnung abzuändern, in Gruppen (Partialsummen) vereinigt worden sind“ z. B.

$$\begin{aligned} A + B + C + D &= A + (B + C) + D \\ = A + B + (C + D) &= (A + B) + (C + D) \\ = A + (B + C + D) &= (A + B + C) + D \end{aligned}$$

und weiter das zweite, commutative Gesetz derselben: „Wie man auch in der Summe $A + B + C + \ldots$ die Glieder anordnen mag, stets erhält man gleiche Vielheiten.“ Z. B.

$$\begin{aligned} A + B + C = A + C + B = B + A + C = B + C + A \\ = C + A + B = C + B + A. \end{aligned}$$

Endlich ergiebt sich noch, dafs $A + B + C + \ldots$ gröfser ist als jedes Glied oder jede aus einigen derselben gebildete Summe; dafs wenn $A = A'$, $B = B'$, $C = C' \ldots$

$$A + B + C + \ldots = A' + B' + C' + \ldots;$$

dafs aber die erstere Summe die gröfsere Vielheit darstellt, wenn mindestens eines ihrer Glieder gröfser ist als das gleichlautende der zweiten.

Entspricht den gleichen Vielheiten $A' = A$ die Zahl a, den gleichen Vielheiten $B' = B$ die Zahl b, so heifst die den gleichen Vielheiten $A' + B' = A + B$ entsprechende Zahl die Summe dieser Zahlen: $a + b$ [Eucl. El. V. prop. 2]. Oder einfacher: „Unter der Summe $a + b$ versteht man eine Zahl, welche neben den Einheiten von a die von b enthält.“

Demnach ergeben sich die Regeln über die Addition der natürlichen Zahlen, wenn man im Vorstehenden statt der grofsen Buchstaben die kleinen setzt. Wir heben noch diejenigen heraus, aus welchen sich nach den Untersuchungen des nächsten Abschnittes die übrigen auf formalem Wege ableiten lassen. Es sind die folgenden sechs:

1) Die Addition der natürlichen Zahlen ist eine eindeutige Verknüpfung von je zweien derselben.

2) $(a + b) + c = a + (b + c)$.

3) $a + b = b + a$.

4) Aus $a = a'$ folgt $a + b = a' + b$.

5) $a + b > a$.

6) Aus $a > a'$ folgt $a + b > a' + b$.

Nunmehr können die Zahlen selbst als Summen dargestellt werden:

$$2 = 1 + 1 \qquad 3 = 1 + 1 + 1 = 2 + 1$$

u. s. w. Die Gleichung 2) des associativen Gesetzes liefert ein recurrirendes Verfahren zur Bestimmung einer jeden Summe. Um z. B. $5 + 4$ zu ermitteln, hat man

$$5 + 4 = 5 + (3 + 1) = (5 + 3) + 1$$
$$5 + 3 = 5 + (2 + 1) = (5 + 2) + 1$$
$$5 + 2 = 5 + (1 + 1) = (5 + 1) + 1.$$

Es ist aber $5 + 1 = 6$, also

$$5 + 2 = 6 + 1 = 7$$
$$5 + 3 = 7 + 1 = 8$$
$$5 + 4 = 8 + 1 = 9.$$

4. Subtraction der natürlichen Zahlen. — Wenn die Vielheit A gröfser ist als B, so bleibt bei Vergleichung der beiden ein Rest D von den in A enthaltenen Einheiten unverbunden. Man hat $B + D = A$. Eine D gleiche Vielheit ergiebt sich als Rest bei Vergleichung der Vielheiten $A = A'$ $B = B'$. Somit folgt der Satz:

„Ist die Zahl $a > b$, so giebt es eine und (wegen des 6. Satzes in Nr. 3) nur eine Zahl d, welche für x gesetzt, die Gleichung $b + x = a$ befriedigt.“ — „Im Falle dafs $a \leqq b$, hat diese Gleichung (zufolge des 5. Satzes in Nr. 3) keine Lösung.“

a heifst der **Minuend**, b der **Subtrahend**, d die **Differenz** oder der **Unterschied** derselben. Sie wird mit $a - b$ bezeichnet, so dafs die Formel besteht:

$$b + (a - b) = (a - b) + b = a.$$

Zunächst bemerken wir die folgenden Sätze. Die darin vorkommenden Differenzen sind als **möglich** vorauszusetzen oder nachzuweisen.

1) „Gleiche Zahlen von gleichen subtrahirt geben gleiche Unterschiede.“

2) „Aus $a + b = a + b'$ folgt $b = b'$.“

3) „Aus $a - b = a' - b$ folgt $a = a'$; aus $a - b = a - b'$ folgt $b = b'$.“

4) „Je nachdem a gleich, gröfser, kleiner als $b - c$, ist $a + c$ gleich, gröfser, kleiner als b und **umgekehrt**.“

5) Je nachdem $a - b$ gleich, gröfser, kleiner als $a' - b'$, ist $a + b'$ gleich, gröfser, kleiner als $a' + b$ und **umgekehrt**.“ — Der erste Theil durch Addition von $b + b'$ auf beiden Seiten der Relationen, der zweite nach I. 7.

6) $(a + b) - b = a$.

7) $a - (a - b) = b \quad (a > b)$.

8) $(a + m) - (b + m) = a - b \quad (a > b)$.

9) $(a - m) - (b - m) = a - b \quad (a > b > m)$.

10) „Wenn $a > a' > b$, so hat man $a - b > a' - b$.“

11) „Wenn $a > b' > b$, so hat man $a - b > a - b'$.“

12) „Wenn $a > a' > b' > b$, so hat man $a - b > a' - b'$.“

Die Beweise von 10) und 11) entweder durch Auflösung der Zahlen in ihre Einheiten oder indirect aus den Sätzen 4) und 6) in Nr. 3. Aus ihnen ergiebt sich dann der letzte Satz.

5. **Berechnung der Aggregate.** Ein Ausdruck, der aus einer endlichen Anzahl von **Gliedern**, worunter wir uns zunächst natürliche Zahlen vorstellen, **nur** mittelst der Operationszeichen $+$ und $-$ gebildet ist, wird ein **Aggregat** und nach der Anzahl seiner Glieder ein **Binom**, **Trinom**, ... **Polynom** genannt. Dabei wird angenommen, dafs er **von links nach rechts fortschreitend** zu berechnen sei d. h. dafs zunächst die erste Zahl gemäfs des ersten Operationszeichens mit der zweiten, dann das Ergebnis ge-

mäfs des zweiten Zeichens mit der dritten zu verknüpfen sei u. s. w., alle einzelnen Schritte als möglich vorausgesetzt. So bedeutet

$$a + b - c = (a + b) - c$$
$$a - b + c = (a - b) + c$$
$$a - b - c = (a - b) - c,$$

wobei bez. vorauszusetzen ist

$$a + b > c, \qquad a > b, \qquad a > b + c.$$

Das Endresultat wird angegeben durch den folgenden Satz: „Ein Aggregat ist gleich dem Unterschiede: Summe des ersten Gliedes und aller, vor denen das Zeichen $+$ steht, weniger der Summe aller Glieder, vor denen das Zeichen $-$ steht.“ Der Satz ergiebt sich durch wiederholte Anwendung der folgenden besonderen Fälle desselben:

13) $\qquad (a - b) + c = (a + c) - b \quad (a > b),$

14) $\qquad (a - b) - c = a - (b + c) \quad (a > b + c),$

die leicht zu beweisen sind, entweder durch Auflösung der Zahlen in ihre Einheiten oder durch formale Verification. Handelt es sich z. B. um Formel 14), so weifs man nach Annahme, dafs $a > b \quad a - b > c$; somit ist $(a - b) - c$ eine Zahl y und man hat

$$c + y = a - b \quad b + c + y = a \quad y = a - (b + c).$$

„Kommen in dem Ausdrucke gleiche Glieder hinter den Zeichen $+$ und $-$ vor, so heben sie sich auf.“

Aus dem vorstehenden Satze folgt, dafs das Endresultat eines Aggregates von der Aufeinanderfolge seiner Glieder nicht abhängt, vorausgesetzt nur, dafs auch bei der neuen Anordnung derselben ein möglicher Ausdruck herauskommt, was nicht immer der Fall ist. Es ist z. B. $7 + 2 - 8 = 9 - 8 = 1$, $7 - 8 + 2$ hat jedoch keinen Sinn.

Die Aufgabe einen Ausdruck, dessen Glieder sämmtlich oder theilweise Aggregate sind, in einen fortschreitend zu berechnenden zu verwandeln, wird durch die Regel gelöst: „Steht ein Aggregat am Anfange des Ausdruckes oder hinter einem $+$, so läfst man die Klammern weg; steht es hinter einem $-$, so ist bei Entfernung der Klammern vor das erste Glied desselben das Zeichen $-$ zu setzen und es sind vor allen folgenden $+$ und $-$ zu vertauschen. Dabei ist jedoch im zweiten Falle vorauszusetzen, dafs der so erhaltene Ausdruck möglich sei, was nicht immer zutrifft."

Der Beweis wird geliefert (vgl. III. 8) mittelst der Formeln 13) und 14) der folgenden, 16) und 17). Es ist

$$a-(b-c)=a-b+c \qquad (a>b>c),$$

was sich nach 13) ergiebt aus

15) $$a-(b-c)=(a+c)-b \qquad (a+c>b),$$

falls $a>b$. Wenn $a+c>b$ und $a\leq b$, so ist $a-(b-c)$ eine Zahl, $a-b+c$ ohne Sinn.

Die Formeln

16) $$(a-b)+(a'-b')=(a+a')-(b+b') \qquad (a>b \quad a'>b')$$

17) $$(a-b)-(a'-b')=(a+b')-(a'+b) \qquad (a>b \quad a'>b' \quad a+b'>a'+b)$$

lassen sich leicht verificiren. Setzt man

$$(a-b)-(a'-b')=y$$

— der Ausdruck hat nach den angegebenen Bedingungen einen Sinn —, so folgt

$$a-b=y+(a'-b'),$$

also wenn man beiderseits $b+b'$ addirt

$$a+b'=y+a'+b \qquad y=(a+b')-(a'+b).$$

6. Multiplication der natürlichen Zahlen. Die Summe von b Gliedern A, wo A eine Einheit oder Vielheit sein kann, wird das b-fache von A genannt und mit bA bezeichnet. A heifst der Multiplicand, b der Multiplicator. Wenn auch die erstere eine natürliche Zahl a ist, so betrachtet man das b-fache von a als Ergebnifs einer Verknüpfung der Zahlen a b, wofür die Zeichen $\times$ und $\cdot$ gebraucht werden:

$$ba = a \times b = a \cdot b$$

und bezeichnet es als das Product aus a in b, jede der Zahlen $a\, b$ als einen Factor desselben. Man setzt noch fest, dafs $a \cdot 1 = a$. — Vom Producte aus einer benannten Zahl A in eine natürliche b kann hier nicht die Rede sein, da Verknüpfungen nur unter gleichartigen Gröfsen stattfinden. bA ist also nun nicht als ein Product anzusehen.

Bei der Multiplication der natürlichen Zahlen treten zunächst die folgenden Regeln auf.

1) Sie ist eine eindeutige Verknüpfung von je zwei Zahlen.

2) Das Product $a\, b\, c \ldots$ d. i. das Resultat der fortschreitenden Multiplication der Zahlen $a\, b\, c \ldots$ ändert sich nicht bei vorhergehender Zusammenfassung der Factoren $a\, b\, c \ldots$ in Partialproducte, wenn nur die vorgeschriebene Ordnung erhalten bleibt. Die Multiplication der natürlichen Zahlen gehorcht dem associativen Gesetze.

3) Diese Multiplication ist auch dem commutativen Gesetze unterworfen, d. h. das Product $a\, b\, c \ldots$ ändert sich auch bei Vertauschung der Factoren nicht.

Es wird in III. 2 gezeigt werden, dafs diese beiden Sätze allgemein gelten, wenn die folgenden besondern Fälle derselben

$$a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \qquad a \cdot b = b \cdot a$$

bestehen. Sie sind leicht zu erweisen, der letztere, indem man b Summen $a = 1 + 1 + 1 + \ldots 1$, der erstere, indem man c Summen $ab = a + a + \ldots a$ (b-mal) untereinander schreibt.

4) „Gleiche Zahlen mit gleichen multiplicirt geben gleiche Producte."

5) „Wenn $b > 1$, so ist $a \cdot b > a$." (Nach dem 5. Satze in Nr. 3.)

6) „Aus $a > a'$ folgt $a \cdot b > a' \cdot b$" (Nach dem 6. Satze in Nr. 3.) Daraus ergiebt sich:

7) „Aus $a > a'$ $b > b'$ folgt $a \cdot b > a' \cdot b'$."

7. Aufserdem besteht bei der Multiplication der natürlichen Zahlen das distributive Gesetz. Um die Formeln

desselben so einfach als möglich anschreiben zu können, ist eine Uebereinkunft darüber nöthig, wie man Ausdrücke, welche neben den Gröfsen **nur** Rechenzeichen enthalten zu verstehen oder wie man die fehlenden Klammern zu ergänzen habe. Bisher ist die Methode der von links nach rechts fortschreitenden Berechnung befolgt worden vgl. I. 2 und II. 5. Wir werden sie immer voraussetzen, sobald **der Ausdruck nur Rechenzeichen einer Stufe** enthält. Dabei sind die Addition und die Subtraction als Verknüpfungen oder Operationen **erster**, die Multiplication und die Division als solche **zweiter** Stufe bezeichnet. Wenn in einem klammerlosen Ausdrucke Rechenzeichen verschiedener Stufe vorkommen, so wird nicht immer nach diesem Grundsatze vorgegangen. So bedeutet zwar $2 \cdot 3 + 1$ dasselbe wie $(2 \cdot 3) + 1$ d. i. 7, $1 + 2 \cdot 3$ dagegen nicht, wie man erwarten sollte, $(1 + 2) \cdot 3 = 9$, sondern das nämliche wie $2 \cdot 3 + 1$. Das diesen und ähnlichen Schreibweisen zu Grunde liegende Princip ist folgendermaafsen zu formuliren: **Kommen Operationen verschiedener Stufen ohne Klammer zusammen, so ist stets diejenige Rechnungsart zuerst vorzunehmen, welche zur höheren Stufe gehört.**[2] Demnach ist $a . c + b \cdot c$ gleichbedeutend mit $(a \cdot c) + (b \cdot c)$ u. s. f.

Nunmehr erhalten die erwähnten distributiven Formeln folgende Gestalt.

8) „$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ und (vermöge des commutativen Gesetzes) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.“ — Der erste Teil folgt aus der Umformung

$$(a + b) \cdot c = (a \overset{1}{\breve{+}} b) + (a \overset{2}{\breve{+}} b) + \ldots + (a \overset{c}{\breve{+}} b)$$

$$= (\overset{1}{\breve{a}} + \overset{2}{\breve{a}} + \ldots + \overset{c}{\breve{a}}) + (\overset{1}{\breve{b}} + \overset{2}{\breve{b}} + \ldots + \overset{c}{\breve{b}}) = a \cdot c + b \cdot c.$$

Man benutzt den Satz (vgl. III. 6), um das Product zweier oder mehrerer Summen zu entwickeln: „Das Product zweier Summen ist gleich der Summe der Producte aus jedem Gliede des einen Factors in jedes des anderen“ z. B.

$$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$$

„Um das Product mehrerer Summen zu erhalten, bildet man alle Producte von je einem Gliede des ersten, je einem des zweiten ... je einem des letzten Factors und addirt sie.“

9) „Ist $a > b$, so hat man

$$(a - b) \cdot c = c \cdot (a - b) = a \cdot c - b \cdot c.\text{“}$$

Der Satz ergiebt sich durch wiederholte Anwendung der Formel 16) in Nr. 5. — Hieraus folgt, dafs wenn $a > b$ $c > d$

$$\begin{aligned}(a - b) \cdot (c - d) &= a \cdot (c - d) - b \cdot (c - d)\\ &= (a \cdot c - a \cdot d) - (b \cdot c - b \cdot d)\\ &= (a \cdot c + b \cdot d) - (a \,.\, d + b \cdot c)\\ &= a \cdot c - a \cdot d + b \cdot d - b \cdot c\end{aligned}$$

und somit auch, dafs

$$a \cdot c + b \cdot d > a \cdot d + b \cdot c$$

sein mufs. — Es sind höchstens acht und mindestens sechs verschiedene Anordnungen der vier Glieder des vorstehenden Ausdruckes zulässig; denn die Aggregate

$$a \cdot c - a \cdot d - b \cdot c + b \cdot d \quad a \cdot c - b \cdot c - a \cdot d + b \cdot d$$

haben manchmal keinen Sinn.

8. Division der natürlichen Zahlen. Wir legen uns nun die Aufgabe vor, eine Zahl x zu bestimmen, welche mit einer gegebenen b multiplicirt, ein gegebenes Product a liefern soll: $b \cdot x = x \cdot b = a$.

Zunächst bemerken wir den folgenden Satz: „Wenn $a > b > 1$, so ist a entweder ein Vielfaches von b oder a liegt zwischen zwei aufeinander folgenden Vielfachen von b. Im ersten Falle hat man $a = qb$, im zweiten $a = qb + r$, wo r eine Zahl kleiner als q ist.“ — Denn unter den a Zahlen b, $2b$ ... ab, von denen die erste kleiner, die letzte gröfser als a ist, kommt a entweder vor oder nicht. Im letzteren Falle müssen wir die Reihe $1, 2 \ldots a$ durchlaufend, zu einer Zahl $1 \leqq q < a$ gelangen, sodafs $qb < a < (q + 1)\, b$.

Die Gleichung $b \cdot x = a$ hat nur dann eine (und zwar nach dem 6. Satze in Nr. 6 nur eine) Auflösung nach x, wenn a ein Vielfaches von b ist. Man bezeichnet sie mit $a : b$ oder $\frac{a}{b}$ und nennt sie Quotient, a Dividend, b

Divisor. Ist a kein Vielfaches von b, so hat die Gleichung $b \cdot x = a$ keine Auflösung; die Division geht nicht auf und es bleibt der Rest r.

Wenn wir in den Sätzen 1)—17) in Nr. 4 und 5 die Operationszeichen $+$ $-$ bez. durch $\cdot$ $:$ ersetzen und, soweit es nöthig ist, annehmen, dafs die darin erscheinenden Quotienten möglich d. i. natürliche Zahlen seien; so erhalten wir Sätze über die Quotienten. In der That beruhen die formalen Beweise der genannten Sätze lediglich auf solchen Eigenschaften der Summe, welche auch dem Producte zukommen, und auf der Eindeutigkeit der Differenz. Im folgenden Verzeichnisse sind die neuen Sätze mit denselben Nummern versehen, wie die ihnen a. a. O. entsprechenden.

1) Gleiche Zahlen durch gleiche dividirt geben gleiche Quotienten.

2) Aus $a \cdot b = a \cdot b'$ folgt $b = b'$.

3) Aus $a : b = a' : b$ folgt $a = a'$, aus $a : b = a : b'$ folgt $b = b'$.

4) Je nachdem a gleich, gröfser, kleiner als die Zahl $b : c$, ist ac gleich, gröfser, kleiner als b und umgekehrt.

5) Wenn $a : b$ $a' : b'$ Zahlen sind, so ist, je nachdem $a : b$ gleich, gröfser, kleiner als $a' : b'$, $a \cdot b'$ gleich, gröfser, kleiner als $a \cdot b'$ und umgekehrt.

6) $(a \cdot b) : b = a$.

7) $a : (a : b) = b$, wenn $a : b$ eine Zahl ist.

8) $(a \cdot m) : (b \cdot m) = a : b$, wenn $a : b$ eine Zahl ist.

9) $(a : m) : (b : m) = a : b$, unter $a : b$ $a : m$ $b : m$ Zahlen verstanden.

Wenn $a : b$ $a' : b'$ (bez. $a' : b$ $a : b'$) Zahlen bedeuten, so hat man

10) Neben $a > a'$ $a : b > a' : b$.

11) Neben $b < b'$ $a : b > a : b'$.

12) Neben $a > a'$ $b < b'$ $a : b > a' : b'$.

13) $(a : b) \cdot c = (a \cdot c) : b$.

14) $(a : b) : c = a : (b \cdot c)$.

15) $a : (b : c) = (a \cdot c) : b$.

16) $(a:b)\cdot(a':b') = (a\cdot a'):(b\cdot b')$.

17) $(a:b):(a':b') = (a\cdot b'):(a'\cdot b)$.

Die letzten Formeln sind so zu verstehen: 13) Ist $a:b$ eine Zahl, so auch $(a\cdot c):b$ und sie ist gleich $(a:b)\cdot c$ u. s. w. Ueberhaupt genügt, die linke Seite der Gleichungen als möglich vorauszusetzen.

Endlich sind noch die folgenden distributiven Formeln zu erwähnen

$$a:m + b:m = (a+b):m$$
$$a:m - b:m = (a-b):m.$$

$a:m$ $b:m$ müssen natürliche Zahlen und in der zweiten $a > b$ sein. — Die erste kann auf eine Summe von beliebig vielen Gliedern ausgedehnt werden (vgl. III. 6).

9. Unter der Potenz a^n versteht man das Product aus n gleichen Factoren a, unter a^1 die Basis a selbst. Aus dem Begriffe der Potenz ergeben sich die in VIII. 1, 2 angeführten Sätze, welche hier nur für den Fall, dafs auch die Basis eine natürliche Zahl ist, benöthigt werden. Auch mufs a. a. O. in (III) vorläufig $a > b$ sein. — Von diesen Sätzen werden wir zunächst vornehmlich den folgenden gebrauchen: „Wenn $m > 1$, so ist $(1+d)^m > 1 + md$.“ Somit kann m so gewählt werden, dafs $(1+d)^m$ irgend eine gegebene Zahl a überschreitet.

Das Potenziren (und seine Umkehrungen: das Radiciren und Logarithmiren) werden häufig als Operationen dritter Stufe bezeichnet. Diese Auffassung ist keineswegs die einzig mögliche (vgl. III. 17), jedoch immer dann anzuwenden, wenn es sich um die Deutung von Ausdrücken handelt, welche aus beliebigen Gröfsen nur mit Hilfe von Operationszeichen gebildet sind. Es gelten nämlich auch, wenn Operationen der dritten Stufe vorkommen, die beiden Conventionen von Nr. 7 — mit der einzigen Ausnahme, dafs unter a^{b^c} nicht $(a^b)^c = a^{bc}$, sondern $a^{(b^c)}$ zu verstehen ist.

Ein Ausdruck, der aus beliebigen Gröfsen in endlicher Anzahl nur mittelst Operationen zweiter und dritter Stufe gebildet ist, heifst Monom.

10. Die Zahlensysteme. Es sei e eine fest gewählte Zahl $\geqq 2$ und a eine beliebige Zahl $\geqq e$. Aus einer Bemerkung in Nr. 9 ergiebt sich, dafs a entweder eine Potenz von e ist — $a = e^m$ — oder zwischen zwei aufeinander folgenden Potenzen von e liegt — $e^m < a < e^{m+1}$. Nach Nr. 8 hat man im zweiten Falle a entweder gleich pe^m oder $pe^m + r$, wo $p < e$ und $r < e^m$ sein mufs. Auf ähnliche Art findet man, dafs wenn $r \geqq e$, r entweder gleich ist $p'e^{m'}$ oder $p'e^{m'} + r'$, wo $m' < m$

$$1 \leqq p' < e \qquad r' < e^{m'};$$

wenn $r' \geqq e$, r' entweder gleich ist $p''e^{m''}$ oder $p''e^{m''} + r''$, wo $m'' < m'$

$$1 \leqq p'' < e \qquad r'' < e^{m''}$$

u. s. f. Im ungünstigsten Falle ist

$$m' = m - 1 \qquad m'' = m - 2 \ldots,$$

so dafs man nach m-maliger Wiederholung des vorstehenden Schlusses bei einem Reste $r^{(m)} < e$ anlangt und nun findet

$$a = pe^m + p'e^{m-1} + p''e^{m-2} + \ldots + r^{(m)}.$$

Mit Hilfe von e Ziffern d. i. der Zeichen für die Zahlen von eins bis $e - 1$ und des Zeichens 0 (Null) dafür, dafs eines der Glieder der vorstehenden Summe vom zweiten an im Ausdrucke von a fehlt, läfst sich jede Zahl a — $e^m \leqq a < e^{m+1}$ — durch $m + 1$ Zeichen $[p\,p' \ldots p^{(m)}]$ anschreiben, da die Anzahl der Zeichen, die hinter einem von ihnen stehen, den Exponenten der Potenz von e angiebt, mit welcher dieses zu multipliciren ist. Die Ziffer 0 ist keine Zahl.

Schon aus I. 7 folgt, dafs umgekehrt jede Summe

$$b = qe^n + q'e^{n'} + q''e^{n''} + \ldots \qquad (n > n' > n'' > \ldots),$$

worin q, q', q'' ... Ziffern bedeuten, zwischen e^n und e^{n+1} liegen mufs. Direct ergiebt sich das durch die Bemerkung, dafs

$$e^n \leqq b \leqq (e - 1)\,e^n + (e - 1)\,e^{n-1} + (e - 1\;e^{n-2} + \ldots$$
$$+ (e - 1) = e^{n+1} - 1.$$

Daraus schliefsen wir noch, dafs es für jede Zahl a **nur eine systematische Darstellung**

$$a = pe^m + p'e^{m'} + p''e^{m''} + \ldots$$

giebt. Setzt man nämlich auch

$$a = qe^n + q'e^{n'} + q''e^{n''} + \ldots,$$

so mufs zunächst $n = m$ sein; denn man hat neben

$$e^m \leqq a < e^{m+1} \qquad e^n \leqq a < e^{n+1}$$

also sowohl $e^m < e^{n+1}$ als auch $e^n < e^{m+1}$. Hierauf schliefst man dafs $q = p$, da sowohl $pe^m \leqq a < (p+1)\,e^m$ als auch $qe^m \leqq a < (q+1)\,e^m$, also $p < q + 1$ und $q < p + 1$ ist. Nun ergiebt sich

$$p'e^{m'} + p''e^{m''} + \ldots = q'e^{n'} + q''e^{n''} + \ldots,$$

woraus auf ähnliche Art abgeleitet wird $n' = m'$ $q' = p'$ u. s. f.

Die Regeln über das Rechnen mit systematischen Zahlen sind unmittelbare Folgerungen aus den in Nr. 3—9 angeführten Sätzen.

11. Hilfssätze aus der Zahlentheorie.[3]) Wenn a ein Vielfaches von b ist, so heifst a **theilbar** durch b. Aus dem Begriffe des Vielfachen fliefsen unmittelbar die folgenden Sätze: „Ist a theilbar durch b, so auch das Product ac (auch nach 13) in Nr. 8). Ist a theilbar durch b, b durch c, so auch a durch c. Sind a und b durch eine Zahl c theilbar, so auch jede Zahl $ax \pm by$." — Nun kann man den **gröfsten gemeinschaftlichen Theiler** zweier Zahlen a b ermitteln. Es sei $a > b$. Ist a durch b theilbar, so ist er b. Andernfalls hat man

$$a = qb + b' \qquad (b' < b),$$

wo b' theilbar ist durch jeden gemeinsamen Theiler von a b. Ist b ein Vielfaches von b', so auch a und es ist b' die gesuchte Zahl. Sonst hat man

$$b = qb' + b'' \qquad (b'' < b'),$$

worin b'' durch jeden gemeinsamen Theiler von a b theilbar ist. Ist b' ein Vielfaches von b'', so auch b und a und es ist b'' die gesuchte Zahl; sonst hat man

$$b' = q''b'' + b''' \qquad (b''' < b'').$$

U. s. f. Da die Reste $b', b'', b''' \ldots$ beständig abnehmen, so mufs die Reihe einmal abbrechen. Wenn der letzte Rest $b^{(n)} = 1$, so nennt man $a\ b$ relative Primzahlen oder Zahlen ohne gemeinsamen Theiler. Wenn er gröfser als 1 ist, so ist er der gröfste gemeinsame Theiler von $a\ b$ d. h. man hat

$$a = b^{(n)}a_1 \qquad b = b^{(n)}b_1,$$

wo $a_1\ b_1$ relativ prim zu einander sein müssen.

Hauptsatz. Sind $a\ b$ relative Primzahlen, so ist jeder gemeinschaftliche Theiler m der Zahlen ak b ein Theiler von k.

Denn aus den soeben erwähnten Gleichungen

$$a = qb + b' \qquad b = q'b' + b'' \qquad b' = q''b'' + b''' \ldots$$
$$b^{(n-2)} = q^{(n-1)}b^{(n-1)} + 1,$$

folgt

$$ak = qbk + b'k \qquad bk = q'b'k + b''k \qquad b'k = q''b''k + b'''k \ldots$$
$$b^{(n-2)}k = q^{(n-1)}b^{(n-1)}k + k,$$

woraus ersichtlich ist, dafs neben $ak\ b$ auch

$$b'k, \quad b''k, \quad b'''k \ldots b^{(n-2)}k, \quad b^{(n-1)}k, \quad k$$

durch m theilbar sind.

Aus diesem Satze folgt: 1) Das Product zweier oder mehrerer Zahlen, deren jede relative Primzahl gegen eine Zahl b ist, ist gleichfalls relative Primzahl zu b.

2) Sind $a\ b$ relative Primzahlen, so auch $a^n\ b^n$.

Jede Zahl, aufser 1, die nur durch 1 und durch sich selbst theilbar ist, heifst Primzahl; jede, die aufser diesen noch andere Theiler hat, zusammengesetzt — eine Bezeichnung, welche durch den Satz gerechtfertigt wird: „Jede zusammengesetzte Zahl läfst sich stets und nur auf eine Weise als Product einer endlichen Anzahl von Primzahlen darstellen.“ — Dividirt man nämlich eine vorgelegte Zahl $a > 1$ nach einander durch die Zahlen $2, 3 \ldots a - 1$, so kann nur Folgendes eintreten. Entweder ist a durch keine derselben theilbar, also eine Primzahl oder es giebt darunter Theiler von a, deren kleinster p eine Primzahl sein mufs. Im zweiten Falle ermittelt man die Zahl $a' = a : p$ und schliefst wie soeben: entweder ist a' eine Primzahl oder durch eine Primzahl $p' \geqq 2$ theilbar. Im zweiten dieser Fälle sucht man die Zahl $a'' = a' : p'$, worüber Aehnliches gilt u. s. f. Da die Zahlen $a, a', a'' \ldots$ beständig abnehmen, so mufs die Reihe einmal abbrechen. Somit erscheint a, wenn es nicht selbst Primzahl ist, als Product von Primzahlen $a = pp' \ldots$ — Und zwar ist das die einzig mögliche Zerlegung von a in Primfactoren. Denn angenommen, es sei überhaupt $a = qq' \ldots$, wo $q, q' \ldots$ Primzahlen bedeuten, so mufs $pp' \ldots$ durch q theilbar, also vermöge des Hauptsatzes q einer der Zahlen $p, p' \ldots$ gleich sein. Setzt man $q = p$, so folgt $p' \ldots = q' \ldots$, woraus man auf dieselbe Weise schliefsen kann, dafs $q' = p'$ u. s. f.

Gemeinschaftliche Vielfache von zwei und mehreren Zahlen $a, b, c \ldots$ Um alle Zahlen zu finden, welche durch $a, b, c \ldots$ theilbar sind, ermittelt man, durch Zerlegung einer jeden in ihre Primfactoren, zunächst alle Primzahlen $p, p' \ldots$, durch die irgend eine der gegebenen Zahlen theilbar ist. Hat man dann noch festgestellt, dafs der Factor p $(p' \ldots)$ in derjenigen der Zahlen $a, b, c \ldots$ wo er am häufigsten vorkommt, r $(r' \ldots)$ Male enthalten ist, so erhält man die gesuchten Zahlen, wenn man in

$$kp^r p'^{r'} \ldots$$

für k alle Zahlen 1, 2 ... setzt. Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Zahlen $a, b, c \ldots$ ist demnach $p^r p'^{r'} \ldots$

III. Abschnitt.

Analytische Theorie der rationalen Zahlen.

1. Wir haben an den natürlichen Zahlen Verknüpfungen (Operationen, Rechnungsarten) zunächst von zwei Stufen kennen gelernt: Addition und Subtraction einer-, Multiplication und Division andererseits. Die Addition und Multiplication nennt man directe oder thetische Operationen, da die Summe und das Product von je zwei Gröfsen einer Art eben zu erklären sind. Aus ihnen gehen die beiden anderen Rechnungsarten durch Umkehrung hervor und heifsen darum inverse oder lytische Operationen.

Formal betrachtet, befindet sich in jeder Stufe eine Thesis und ihre Lysis. Die erstere gehorcht sowol dem associativen, als auch dem commutativen Gesetze, die letztere ist, wenn überhaupt möglich, eindeutig. Schon diese Analogie läfst es als wünschenswerth erscheinen, ein für alle Male festzustellen, was aus gewissen formalen Voraussetzungen über eine Verknüpfung gefolgert werden könne. Dazu kommt, dafs es aufser den natürlichen Zahlen noch andere Gröfsen giebt, mit denen gerechnet werden kann, theils nach den Regeln, die im vorigen Abschnitte aufgeführt sind, theils nach anderen, mehr oder weniger davon abweichenden. Daher werden uns Untersuchungen ähnlich den soeben erledigten, noch öfters begegnen. Man darf geradezu behaupten, dafs wenn man die Rechnungsregeln nicht von einem Falle, wo sie erwiesen sind, versuchsweise auf einen anderen übertragen, sondern durchaus sicher begründen will, die folgende Untersuchung unentbehrlich ist. Denn ohne sie würde die Darstellung in eine ermüdende Breite verfallen.

Voraussetzung A.) „Es sei gegeben ein System von Gröfsen $a, b, c \ldots$ (I). Demnach besteht eine Definition, nach welcher zu entscheiden ist, ob irgend zwei unter ihnen als gleich oder ungleich anzusehen sind. Je zwei der Gröfsen $(a\ b)$ lassen sich eindeutig verknüpfen und zwar ist das Resultat eine Gröfse (c) des Systemes, wofür wir nach I. 2 die Bezeichnung

$$a \circ b = c$$

anwenden. Die Verknüpfung $\circ$ wird als Thesis bezeichnet. Wir haben noch anzunehmen, dafs in dieser Gleichung c durch jede ihr gleiche Gröfse c' ersetzt werden dürfe — und dafs neben

$$a = a' \qquad b = b' \qquad a \circ b = a' \circ b'$$

sei."[1])

Wir werden nunmehr die Thesis $\circ$ nacheinander dem associativen und commutativen Gesetze unterwerfen, wobei hervorzuheben ist, dafs sie von einander völlig unabhängig sind.[2])

2. **I. Satz.** Ist die dreigliederige Thesis associativ, so ist die Thesis aus beliebig vielen Gliedern associativ.

Ist eine Folge von drei Gröfsen a, b, c gegeben, so lassen sich daraus unter Einhaltung der vorgeschriebenen Anordnung nur die Ausdrücke $(a \circ b) \circ c$, $a \circ (b \circ c)$ bilden. Wir nehmen an

Voraussetzung B.)

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c).$$

Jede der beiden Seiten dieser Gleichung kann man mit $a \circ b \circ c$ bezeichnen, ohne dadurch eine Unklarheit hervorzurufen. — Um den Satz zu beweisen,[3]) nehmen wir ihn als richtig an für die Verknüpfungen aus $3, 4, 5 \ldots n-1$ Gröfsen und zeigen, dafs er alsdann auch besteht für solche aus n Gröfsen $a_1, a_2 \ldots a_n$. Wie auch $r \leqq n-1$ Gröfsen unter ihnen z. B. $a_1, a_2 \ldots a_r$, ohne diese Aufeinanderfolge abzuändern, zunächst in Gruppen von höchstens zwei vertheilt und innerhalb derselben verknüpft werden, die so erhaltenen Resultate unter der nämlichen Beschränkung wieder in Gruppen von höchstens zwei zusammentreten und innerhalb derselben verknüpft werden u. s. f., bis endlich noch zwei Ausdrücke vorhanden sind, die in gehöriger Ordnung verknüpft das Endresultat liefern; diese sollen immer einander gleich sein. Dann aber kann in den Bezeichnungen eine aufserordentliche Vereinfachung eintreten, indem für jede der genannten gleichen Gröfsen $a_1 \circ a_2 \circ \ldots \circ a_r$ geschrieben werden darf. Unter der obigen Annahme geben somit die n Gröfsen $a_1, \ldots a_n$ nur noch Veranlassung zu den folgenden $n-1$ Ausdrücken

$$\begin{aligned}
x_1 &= a_1 \circ (a_2 \circ a_3 \circ \ldots \circ a_n) \\
x_2 &= (a_1 \circ a_2) \circ (a_3 \circ \ldots \circ a_n) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_r &= (a_1 \circ a_2 \ldots \circ a_r) \circ (a_{r+1} \circ \ldots \circ a_n) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_{n-1} &= (a_1 \circ a_2 \ldots \circ a_{n-1}) \circ a_n.
\end{aligned}$$

Zufolge B.) ergiebt sich aber sofort, dafs $x_r = x_{r+1}$. Denn setzt man

$$1 \leqq r \leqq n-1 \qquad a_1 \circ \ldots \circ a_r = s_r \qquad a_{r+1} \circ \ldots \circ a_n = t_r,$$

so ist

$$s_r \circ (a_{r+1} \circ t_{r+1}) = (s_r \circ a_{r+1}) \circ t_{r+1}$$

d. i.

$$s_r \circ t_r = s_{r+1} \circ t_{r+1}.$$

Demnach hat man

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1}$$

w. z. b. w.[3*])

II. Satz. Jede associative Thesis ist commutativ, wenn die zweigliederige Thesis es ist.

Voraussetzung C.)

$$a \circ b = b \circ a.$$

Es sei

$$a_1 \circ a_2 \ldots \circ a_n = x.$$

Man kann aus der Anordnung $a_1, a_2 \ldots a_n$ jede beliebige dadurch ableiten, dafs man nur je zwei benachbarte Buchstaben vertauscht. Wie haben somit nur zu zeigen, dafs

$$\begin{aligned} x &= a_2 \circ a_1 \circ a_3 \ldots \circ a_n \\ &= a_1 \circ \ldots \circ a_{r-1} \circ a_{r+1} \circ a_r \circ a_{r+2} \ldots \circ a_n \\ &= a_1 \circ a_2 \ldots \circ a_n \circ a_{n-1}. \end{aligned}$$

Es ist aber nach C.)

$$\begin{aligned} x &= s_{r-1} \circ (a_r \circ a_{r+1}) \circ t_{r+1} \\ &= s_{r-1} \circ (a_{r+1} \circ a_r) \circ t_{r+1} \\ &= s_{r-1} \circ a_{r+1} \circ a_r \circ t_{r+1}. \end{aligned}$$

Aehnlich ergeben sich auch die beiden anderen Umformungen von x.

Anmerkung. Unter Voraussetzung C.) folgt aus dem Satze (A.): „Neben $a = a'$ ist $a \circ b = a' \circ b$“ der allgemeinere „Neben $a = a'$ $b = b'$ ist $a \circ b = a' \circ b'$.“ Denn man hat nacheinander

$$a \circ b = a' \circ b = b \circ a' = b' \circ a' = a' \circ b'.$$

3. Die lytische oder inverse Operation. Unter Festhaltung der Annahmen A.), B.), C.) betrachten wir nun die Gleichung $b \circ x = x \circ b = a$, worin a, b beliebige gegebene Gröſsen des Systemes (I) bedeuten. Es sind drei Fälle denkbar: entweder giebt es eine oder gar keine oder mehr als eine Gröſse in (I), die für x gesetzt die Gleichung befriedigt. Daſs ihr neben einer Gröſse x auch jede $x' = x$ genügt, folgt unmittelbar aus A.)

Voraussetzung D.) „Die Gleichung

$$x \circ b = b \circ x = a$$

werde entweder, was immer auch a, b für Gröſsen des Systemes (I) sein mögen, oder doch bei bestimmten Werthen derselben durch eine und nur eine Gröſse dieses Systemes befriedigt, wofür wir die Bezeichnung

$$x = a \cup b$$

gebrauchen — gesprochen: „von a getrennt b“ oder kurz „a ab (weg) b“. Demnach ist

$$(a \cup b) \circ b = a.\text{“} \tag{α}$$

$a \cup b$ wird wie $a \circ b$ als eindeutiges Symbol angesehen, da es nur unter sich gleiche Gröſsen bedeutet. Das soll festgehalten werden, so dafs wir in solchen Fällen, wo es ungleiche Gröfsen im Systeme (I) giebt, welche die Gleichung $b \circ x = a$ befriedigen, das Symbol $a \cup b$ als unzulässig betrachten. Um Wiederholungen zu vermeiden, bemerken wir, dafs in den folgenden Sätzen vom zweiten an vorausgesetzt ist, dafs alle in denselben vorkommenden lytischen Symbole $a \cup b$ möglich und eindeutig seien.

III. Satz. Aus den Voraussetzungen A.) — D.) ergeben sich folgende Regeln für das Rechnen nach den Operationen $\circ$ und $\cup$.

1) „Ist $a = a'$, $b = b'$ so existirt neben $a \cup b$ auch $a' \cup b'$ und zwar ist $a \cup b = a' \cup b'$." — Aus $a \cup b = x$ folgt $a = b \circ x$, also nach A.) $a' = b \circ x$. Da $b \circ x = b' \circ x$, so hat man $a' = b' \circ x$. Diese Gleichung kann nur eine Lösung haben, da auch umgekehrt aus ihr wieder $b \circ x = a$ folgt; somit ist $x = a' \cup b'$.

2) „Es ist $(a \circ b) \cup b = a$ unter Voraussetzung, dafs die Gleichung $a \circ b = x \circ b$ nur die eine Lösung $x = a$ hat."

3) $\quad a \cup b = (a \circ m) \cup (b \circ m) = (a \cup m) \cup (b \cup m).$

Wir haben wie oben $a = b \circ x$, also

$$a \circ m = (b \circ m) \circ x,$$

somit, wenn wir voraussetzen, dafs diese Gleichung nur eine Lösung hat,

$$x = (a \circ m) \cup (b \circ m).$$

Setzt man

$$a \cup m = p, \qquad b \cup m = q,$$

so hat man $a = m \circ p$ neben

$$a = (m \circ q) \circ x = m \circ (q \circ x),$$

also

$$p = q \circ x, \qquad x = p \cup q,$$

die Eindeutigkeit von x vorausgesetzt.[3**])

4) $(a \cup b) \circ c = (a \circ c) \cup b.$

5) $(a \cup b) \cup c = a \cup (b \circ c).$

6) $a \cup (b \cup c) = (a \circ c) \cup b.$

Die Beweise dieser Formeln bieten keine Schwierigkeit dar. $a \cup b$ als möglich und eindeutig angenommen, ist auch

$(a \smile b) \circ c$ eine Gröſse y unseres Systemes. Man hat $b \circ y = a \circ c$, kann also, wenn diese Gleichung nicht mehr als eine Lösung y hat, schreiben $y = (a \circ c) \smile b$. U. s. f. — Man hat ferner

7) $(a \smile b) \circ (a' \smile b') = (a \circ a') \smile (b \circ b')$.

8) $(a \smile b) \smile (a' \smile b') = (a \circ b') \smile (a' \circ b)$.

Denn sind $a \smile b$, $a' \smile b'$ Gröſsen des Systemes (I), so auch

$$(a \smile b) \circ (a' \smile b') = z.$$

Demnach findet man

$$z \circ (b \circ b') = a \circ a',$$

sodaſs wenn diese Gleichung nur eine Lösung für z zuläſst,

$$z = (a \circ a') \smile (b \circ b')$$

gesetzt werden kann. U. s. f.

9) Der „fortschreitend" zu berechnende Ausdruck

$$a_1 \circ a_2 \circ \ldots a_{r_1} \smile b_1 \smile b_2 \smile \ldots . b_s \circ a_{r_1+1} \circ \ldots . \qquad (\beta)$$

liefert, wenn bei Ausführung der aufeinander folgenden Verknüpfungen a_1 mit a_2, $a_1 \circ a_2$ mit a_3 u. s. f. kein Widersinn zu Tage tritt, nach 4) und 5) als Endresultat $A \smile B$, unter A das Resultat der thetischen Verknüpfung von a_1 mit allen hinter einem $\circ$ stehenden Gröſsen, unter B das Resultat der thetischen Verknüpfung aller hinter einem $\smile$ stehenden Gröſsen verstanden. Dabei können je zwei gleiche Gröſsen hinter verschiedenen Operationszeichen nebst diesen selbst gestrichen werden. — Daraus erhellt, daſs das Endresultat von der Anordnung der in (β) vorgeschriebenen Operationen unabhängig ist, woferne der Ausdruck nur auch bei der neuen Anordnung derselben einen Sinn hat.

10) Ist ein Ausdruck, welcher eingeklammerte Parthien enthält, in einen fortschreitend zu berechnenden zu verwandeln, so können die Klammern am Anfange oder hinter einem $\circ$ wegbleiben; bei Entfernung derselben hinter einem $\smile$ ist vor das erste Glied hinter der Klammer das Operationszeichen $\smile$ zu setzen und es sind vor allen folgenden Gliedern die Zeichen $\circ$ und $\smile$ zu vertauschen (vgl. Nr. 8). Dabei ist jedoch voraus-

zusetzen, dafs die nun vorzunehmende fortschreitende Berechnung auch möglich sei.

4. Es ist zweckmäfsig anstatt D.) eine einfachere Voraussetzung noch besonders in Betracht zu ziehen.

Voraussetzung D$_1$.) „Es giebt entweder eine und dann nur eine oder gar keine Gröfse des Systemes (I), welche für x gesetzt, die Gleichung $b \circ x = a$ erfüllt.“

Dann ergeben sich nach dem 1. Satze in Nr. 3 zunächst die folgenden:

2) „Aus $a \circ b = a \circ b'$ folgt $b = b'$.“

3) „Aus $a \cup b = a' \cup b$ folgt $a = a'$, aus $a \cup b = a \cup b'$ folgt $b = b'$.“

4) „Ist $a \cup b = a' \cup b'$, so hat man $a \circ b' = a' \circ b$ und umgekehrt: besteht die letztere Gleichung und ist $a \cup b$ möglich, so existirt auch $a' \cup b'$ und es ist $a \cup b = a' \cup b'$.“ — Um den ersten Theil zu zeigen, verknüpft man beide Seiten der Gleichung $a \cup b = a' \cup b'$ mit $b \circ b'$. Besteht aber $a \circ b' = a' \circ b$ und ist $a = b \circ x$, so folgt

$$b \circ (x \circ b') = a' \circ b$$

also nach 2)

$$x \circ b' = a', \qquad x = a' \cup b'.$$

Daran schliefsen sich der 2.—8. Satz der vorigen Nr., wobei die Zulässigkeit des Ausdruckes $(a \circ b) \cup b$ im 2., sowie der die rechten Seiten der Gl. 3)—8) bildenden lytischen Symbole sich nun von selbst versteht.

5. Verbinden wir mit den Annahmen A.) B.) C.) noch die

Voraussetzung E.) „1) Unter je zwei ungleichen Gröfsen des Systemes (I) sei die eine als die gröfsere, die andere als die kleinere erklärt. 2) Es sei neben

$$a > a' \qquad a \circ b > a' \circ b''$$

so ergiebt sich sofort der

Satz IV. „Wenn

$$a_1 \geqq b_1 \quad a_2 \geqq b_2 \ldots \quad a_n \geqq b_n \quad (n \geqq 2)$$

und wenigstens in einer dieser Relationen das Zeichen $>$ steht, so ist

$$a_1 \circ a_2 \circ \ldots a_n > b_1 \circ b_2 \circ \ldots b_n.“$$

„Wenn neben diesen Annahmen noch die Möglichkeit der Lysis, wenigstens bedingungsweise, feststeht, dann kann aus E) geschlossen werden

1) die Eindeutigkeit der Lysis (D_1); ferners die Sätze:

2) Neben $a > a'$ ist $a \cup b > a' \cup b$.

3) Neben $b < b'$ ist $a \cup b > a \cup b'$.

4) Neben $a > a'$ $b < b'$ ist $a \cup b > a' \cup b'$.

Dabei ist die Existenz der Gröfsen $a \cup b$, $a' \cup b$ u. s. f. vorausgesetzt.“ Der Satz 1) wird indirect gezeigt; 2) und 3) folgen nach dem allgemeinen Satze in I. 7. — 4) geht aus 2) und 3) hervor.

Wir werden später noch die folgenden Sätze gebrauchen:

„5) Neben $a \cup b \gtreqless c$ hat man entsprechend $a \gtreqless b \circ c$ und umgekehrt, immer $a \cup b$ als im Systeme (I) vorhanden gedacht.

6) Existiren $a \cup b$ $a' \cup b'$, so folgt aus $a \cup b \lesseqgtr a' \cup b'$ entsprechend $a \circ b' \gtreqless a' \circ b$ und umgekehrt.“

Die ersten Theile folgen aus E.), indem man beide Seiten der Relationen mit b, bez. $b \circ b'$ verknüpft; die Umkehrungen nach I. 7.

Satz IV.*) „Weifs man, dafs neben A.) B.) C.) E. 1.) die Regel „$a \circ b > a$“ gilt, so ergiebt sich, dafs $a_1 \circ a_2 \circ \ldots a_n$ gröfser ist als das Resultat der Verknüpfung eines Theiles der Gröfsen $a_1 \ldots a_n$, sowie als jede einzelne.“

6. Distributive Formeln. Wir betrachten nun zwei thetische Operationen $\circ$ und $\odot$.

Satz V. „Es sei die Operation $\circ$ associativ. 1.) Besteht die Formel

$$(a \circ b) \odot c = (a \odot c) \circ (b \odot c) \qquad (\gamma),$$

so hat man

$$(a_1 \circ a_2 \circ \cdot a_m) \odot c = (a_1 \odot c) \circ (a_2 \odot c) \circ \ldots \quad (a_m \odot c).\text{“} \quad (\delta)$$

Beweis. Man zerlege

$$a_1 \circ a_2 \circ \cdot a_m = (a_1 \circ a_2 \circ \cdot a_{m-1}) \circ a_m$$

und setze in (γ)

$$a = a_1 \circ a_2 \circ \ldots a_{m-1}, \qquad b = a_m.$$

Hierauf zerlege man $a_1 \circ a_2 \circ \ldots a_{m-1}$ u. s. f.

„2) Desgleichen folgt aus

$$a \odot (b \circ c) = (a \odot b) \circ (a \odot c) \qquad (\varepsilon)$$

$$a \odot (b_1 \circ b_2 \circ \ldots b_n) = (a \odot b_1) \circ (a \odot b_2) \circ \ldots (a \odot b_n).“$$

„3) Wenn die Formeln (γ), (ε), welche die beiden Seiten des distributiven Principes heifsen, zugleich Geltung haben, so kann man jeden Ausdruck

$$(a_1 \circ a_2 \circ \ldots\ldots a_m) \odot (b_1 \circ b_2 \circ \ldots\ldots b_n)$$

in doppelter Weise entwickeln.“ So findet man z. B. für $s = (a \circ b) \odot (c \circ d)$, wenn

$$a \odot c = l \quad b \odot c = m \quad a \odot d = n \quad b \odot d = p$$

gesetzt werden, zuerst (γ) dann (ε) anwendend, $s = l \circ n \circ m \circ p$ und in umgekehrter Ordnung vorgehend, $s = l \circ m \circ n \circ p$.

„4) Haben die Gleichungen

$$x_1 \odot c = a_1 \quad x_2 \odot c = a_2 \ldots . x_m \odot c = a_m$$

die Auflösungen

$$x_1 = a_1 \mathbin{\dot{\smile}} c \quad x_2 = a_2 \mathbin{\dot{\smile}} c \ldots . x_m = a_m \mathbin{\dot{\smile}} c$$

und besteht die Formel γ), so hat man

$$(a_1 \mathbin{\dot{\smile}} c_1) \circ (a_2 \mathbin{\dot{\smile}} c_2) \circ \ldots (a_m \mathbin{\dot{\smile}} c_m) = (a_1 \circ a_2 \ldots \circ a_m) \mathbin{\dot{\smile}} c,$$

auch die letzte Gröfse als eindeutig vorausgesetzt.“

Diese Gleichung ergiebt sich aus (δ), indem man $a_1, a_2 \ldots a_m$ bez. durch $x_1, x_2 \ldots x_m$ ersetzt.

Aus 3) ergiebt sich der folgende Satz.[4])

„Wenn die Operation $\circ$ associativ ist und jede Gleichung $b \circ x = a$, sowie $x \circ b = a$ höchstens eine Auflösung nach x hat, wenn ferner im Systeme (I) zu jeder Gröfse m ein Paar von Gröfsen $x\, y$ vorhanden ist, so dafs $m = x \odot y$; dann folgt aus den beiden Seiten des distributiven Gesetzes (γ), (ε), dafs die Operation $\circ$ commutativ ist.“

Aus beiden obigen Darstellungen von s folgt nämlich

$$l \circ (n \circ m \circ p) = l \circ (m \circ n \circ p),$$

somit $n \circ m \circ p = m \circ n \circ p$ d. i. $(n \circ m) \circ p = (m \circ n) \circ p$, also endlich $(n \circ m) = (m \circ n)$. Da m, n bei gehöriger Bestimmung von a, b, c, d beliebige Gröſsen von (I) sein können, so gilt für die Thesis o das commutative Gesetz allgemein.

7. Bisher ist angenommen worden, daſs die den Annahmen A.) B.) C.) genügende Verknüpfung o der Gröſsen (I) manchmal keine Umkehrung zulasse. Dadurch wird die Giltigkeit der in Nr. 3—5 aufgestellten Formeln in der Art beschränkt, daſs die darin vorkommenden lytischen Symbole möglich und eindeutig sein müssen. Wir wollen nun neue Gröſsen aufstellen, welche das System (I) dergestalt ergänzen sollen, daſs sie die noch unlösbaren Gleichungen $b \circ x = a$ befriedigen und mit welchen dabei nach denselben Regeln gerechnet werden kann, wie mit den ursprünglichen Gröſsen. — Wenn wir uns auf die Annahme D_1.) beschränken, zufolge welcher es entweder nur eine Gröſse oder gar keine Gröſse x unter den (I) giebt, so werden wir durch Einführung der neuen Gröſsen den Formeln in Nr. 3—5 die volle Allgemeinheit verschaffen. Erst dann kann eigentlich vom algebraischen Rechnen mit Buchstaben, die jede Gröſse des Systemes bedeuten können, die Rede sein.

Wir setzen nun fest:[5])

1. Definition. „Wenn im Falle D_1) der Gleichung $b \circ x = a$ keine Gröſse des Systemes (I) genügt, so soll sie durch ein und nur ein neues, in (I) nicht vorhandenes Ding x befriedigt werden, das mit $a \cup b$ bezeichnet werden kann, weil dieses Symbol noch nicht vergriffen ist. Man hat also

$$b \circ (a \cup b) = (a \cup b) \circ b = a\,.."$$

Da die neuen Objecte keine weiteren Eigenschaften besitzen, so kann man ihnen solche nach Belieben beilegen, wenn sie sich nur untereinander nicht widersprechen. Zunächst machen wir die Dinge zu Gröſsen durch Unterscheidung von gleichen und ungleichen unter ihnen, wozu man durch den 4. Satz in Nr. 4 gelangt.

Die Gleichung $a \circ b' = a' \circ b$ hat auch dann noch einen Sinn, wenn $a \cup b$ $a' \cup b'$ nicht dem Systeme (I) angehören. Da überdies der Satz erhalten bleiben soll, so treffen wir die folgende Bestimmung.

2. Definition. Zwei neue Dinge $a \smile b$ und $a' \smile b'$ seien dann und nur dann einander gleich, wenn

$$a \circ b' = a' \circ b.$$

Die Definition ist zulässig. Denn ist nach ihr

$$a \smile b = a' \smile b', \quad a' \smile b' = a'' \smile b'',$$

so ist nach ihr auch $a \smile b = a'' \smile b''$. Wir haben nämlich

$$a \circ b' = a' \circ b, \quad a' \circ b'' = a'' \circ b',$$

also

$$(a \circ b') \circ (a' \circ b'') = (a' \circ b) \circ (a'' \circ b')$$

d. i.

$$(a' \circ b') \circ (a \circ b'') = (a' \circ b') \circ (a'' \circ b)$$

und nach dem 2. Satze in Nr. 4 $a \circ b'' = a'' \circ b$. — Wir merken an, dafs neben $m = m'$ $a \smile b = (a \circ m) \smile (b \circ m')$ und dafs wenn $b = a$, nur dann $a' \smile b' = a \smile b$ sein kann, falls auch $b' = a'$ ist.

Die neuen $a \smile b$ sind somit Gröfsen geworden, welche im Gegensatze zum ursprünglichen System (I) das System (II) bilden und mit $\alpha, \beta, \gamma \ldots.$ bezeichnet werden mögen. Wenn es ohne Unklarheit geschehen kann, werden $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ auch für die Gröfsen des aus (I) und (II) zusammengesetzten, des erweiterten Systemes gebraucht werden.

Versuchen wir nun die thetische Verknüpfung $\circ$ zwischen den alten und neuen Gröfsen einer- und den letzteren unter sich andererseits in der Art zu definiren, dafs die dafür hinsichtlich der Gröfsen (I) bereits angenommenen Gesetze der Associativität und Commutativität bestehen bleiben. Mit Rücksicht auf die Formeln 4) und 7) in Nr. 3 müssen wir dann festsetzen:

3. Definition. „Sind $a \smile b$, $a' \smile b'$ Gröfsen des Systemes (II), so sei

$$(a \smile b) \circ c = c \circ (a \smile b) = (a \circ c) \smile b \tag{1}$$

$$(a \smile b) \circ (a' \smile b') = (a \circ a') \smile (b \circ b'), \tag{2}$$

worin die rechten Seiten auch durch jede ihnen bez. gleiche Gröfse ersetzt werden können.“ — Nunmehr erkennt man, dafs wenn $a \smile b = a' \smile b'$ auch $(a' \smile b') \circ b = a$ und dafs umgekehrt die letzte Gleichung nur dann besteht, wenn $a \smile b = a' \smile b'$. Somit ist die in der 1. Definition geforderte Eindeutigkeit von $a \smile b$ gewahrt.

Satz VI. „Wird die Operation $\circ$ im erweiterten Gröſsensysteme durch die Gleichungen (1), (2) definirt, so ist sie ausnahmslos commutativ und associativ.“

„Bezeichnen α, α', β Gröſsen dieses Systemes, so besteht der Satz: Ist $\alpha = \alpha'$ so ist $\alpha \circ \beta = \alpha' \circ \beta$.“ (3)

„Die Gleichung $\xi \circ \beta = \alpha$ hat nach ξ eine und nur eine Lösung, die im Anschlusse an Nr. 3 mit $\xi = \alpha \smile \beta$ bezeichnet wird. Die Lysis ist stets möglich und eindeutig.“

Beweis. Daſs $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$, folgt aus den Formeln (1), (2). Beim Nachweise der Gleichung

$$(\alpha \circ \beta) \circ \gamma = \alpha \circ (\beta \circ \gamma) \tag{4}$$

sind nach der Natur der darin auftretenden Gröſsen acht Fälle zu unterscheiden, welche folgende Zusammenstellung ersichtlich machen soll:

$$\begin{matrix} 1)\ abc & 2)\ ab\gamma & 3)\ a\beta c & 4)\ a\beta\gamma \\ 5)\ \alpha bc & 6)\ \alpha b\gamma & 7)\ \alpha\beta c & 8)\ \alpha\beta\gamma. \end{matrix} \tag{5}$$

Hier bedeuten die lateinischen Buchstaben Gröſsen des Systemes (I), die griechischen ausschlieſslich solche von (II) und zwar sei

$$\alpha = m \smile n, \quad \beta = p \smile q, \quad \gamma = r \smile s.$$

Der 1. Fall kommt nicht mehr in Betracht. Im 2. Falle hat man

$$(a \circ b) \circ \gamma = (a \circ b) \circ (r \smile s) = (a \circ b \circ r) \smile s.$$

Andererseits ist

$$b \circ \gamma = (b \circ r) \smile s \quad a \circ (b \circ \gamma) = (a \circ b \circ r) \smile s,$$

mag nun $b \circ \gamma$ eine Gröſse des ersten oder zweiten Systemes sein. Somit folgt $(a \circ b) \circ \gamma = a \circ (b \circ \gamma)$. Ähnlich der Beweis im 3. und 5. Falle. In den übrigen Fällen hat man den Hilfssatz zu gebrauchen, daſs die Gleichung (2) auch gilt, wenn $a \smile b$ eine Gröſse des ersten, $a' \smile b'$ eine des zweiten Systemes ist. — Es sei $a \smile b = d$, so daſs nach (1)

$$\varkappa = (a \smile b) \circ (a' \smile b') = d \circ (a' \smile b') = (d \circ a') \smile b'.$$

Nach Nr. 3 ist $d \circ a' = (a \circ a') \smile b$ und daher, wenn $\varkappa$ zu (I) gehört, in der That $\varkappa = (a \circ a') \smile (b \circ b')$. Ist aber $\varkappa$ eine neue Gröfse, so weifs man zunächst nur, dafs

$$b' \circ \varkappa = d \circ a' = (a \circ a') \smile b,$$

also

$$b \circ (b' \circ \varkappa) = a \circ a'.$$

Da aber das associative Gesetz im 2. Falle schon erwiesen ist, so folgt

$$(b \circ b') \circ \varkappa = b \circ (b' \circ \varkappa) = a \circ a'$$

d. i.

$$\varkappa = (a \circ a') \smile (b \circ b').$$

Nunmehr bietet der Nachweis von (4) keine Schwierigkeit mehr dar; man braucht nur die rechte und linke Seite der Gleichung zu entwickeln und wird sie als übereinstimmend erkennen. So ist z. B. im 8. Falle

$$\alpha \circ \beta = (m \circ p) \smile (n \circ q) \qquad \beta \circ \gamma = (p \circ r) \smile (q \circ s);$$

somit

$$(\alpha \circ \beta) \circ \gamma = (m \circ p \circ r) \smile (n \circ q \circ s) = \alpha \circ (\beta \circ \gamma).$$

Wenn man den unten bewiesenen Satz (3) anwenden will, so reicht diese Entwicklung auch für die Fälle 3)—7) aus; man braucht sich nur a in der Form $m \smile n$ zu denken u. s. w. — Vermöge der Commutativität der zweigliedrigen Thesis lassen sich übrigens der 5. und 3. Fall auf den 2., der 7. und 6. auf den 4. zurückführen. (Vgl. IV. 5.)

Der Beweis des Satzes (3) verlangt nach der Natur der Gröfsen α, β die Unterscheidung von vier Fällen, die in dem ähnlich wie oben entworfenen Schema

$$1)\ a, b \qquad 2)\ a, \beta \qquad 3)\ \alpha, a \qquad 4)\ \alpha, \beta \tag{6}$$

enthalten sind. Uebrigens bietet sich die Formel (3) in jedem Falle unmittelbar dar. Es sei $\alpha' = m' \smile n'$, so dafs

$$m \circ n' = m' \circ n; \tag{7}$$

im letzten hat man dann z. B.

$$\alpha \circ \beta = (m \smile n) \circ (p \smile q) = (m \circ p) \smile (n \circ q)$$
$$\alpha' \circ \beta = (m' \circ p) \smile (n' \circ q).$$

Aus (7) folgt aber durch Verknüpfung mit $p \circ q$

$$(m \circ p) \circ (n' \circ q) = (m' \circ p) \circ (n \circ q)$$

d. i.

$$\alpha \circ \beta = \alpha' \circ \beta,$$

mag $\alpha \circ \beta$ dem Systeme (I) oder (II) angehören.

Die nämlichen vier Fälle (6) sind zu unterscheiden hinsichtlich der Gleichung $\xi \circ \beta = \alpha$. Der erste ist bereits erledigt; von den übrigen wollen wir den letzten durchführen. Wenn dieser Gleichung überhaupt eine Gröfse des erweiterten Systemes (I), (II) genügt, so kann sie immer in die Form $\xi = x \cup y$ gebracht werden. Es soll demnach sein

$$(x \cup y) \circ (p \cup q) = m \cup n$$

d. i.

$$(x \circ p) \cup (y \circ q) = m \cup n$$

$$(x \circ p) \circ n = (y \circ q) \circ m \qquad x \circ (p \circ n) = y \circ (q \circ m).$$

Die letzte Gleichung wird erfüllt durch die Annahme

$$x = (q \circ m) \qquad y = (p \circ n),$$

aber auch durch

$$x = (y \circ q \circ m) \cup (p \circ n),$$

wobei wir y willkürlich lassen können, nur so beschränkt, dafs die rechts stehende Lysis eine Gröfse des Systemes (I) liefert. Es ist jedoch nach der 2. Definition auch im letzteren Falle

$$x \cup y = (q \circ m) \cup (p \circ n).$$

Die Gleichung $\xi \circ \beta = \alpha$ kann somit nur eine Lösung haben:

$$\xi = (q \circ m) \cup (p \circ n).$$

Dafs diese auch wirklich genügt, zeigt die Substitution derselben für ξ:

$$[(q \circ m) \cup (p \circ n)] \circ (p \cup q) = (p \circ q \circ m) \cup (p \circ q \circ n) = m \cup n.$$

8. Zufolge des Satzes VI. genügt das aus den Systemen (I), (II) zusammengesetzte $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ vollständig den im Satze III. verlangten Bedingungen. Man kann daher in den darin aufgeführten Sätzen die $a, b, c \ldots$ ohne weiteres durch die $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ ersetzen und hat demnach:

1) Ist $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, so ist $\alpha \cup \beta = \alpha' \cup \beta'$.
2) $(\alpha \circ \beta) \cup \beta = \alpha$.
3) $\alpha \cup \beta = (\alpha \circ \mu) \cup (\beta \circ \mu)$.
4) $(\alpha \cup \beta) \circ \gamma = (\alpha \circ \gamma) \cup \beta$.
5) $(\alpha \cup \beta) \cup \gamma = \alpha \cup (\beta \circ \gamma)$.
6) $\alpha \cup (\beta \cup \gamma) = (\alpha \cup \gamma) \cup \beta$.
7) $(\alpha \cup \beta) \circ (\alpha' \cup \beta') = (\alpha \circ \alpha') \cup (\beta \circ \beta')$.
8) $(\alpha \cup \beta) \cup (\alpha' \cup \beta') = (\alpha \circ \beta') \cup (\alpha' \circ \beta)$.

Und zwar gelten alle diese Formeln ohne jegliche Beschränkung.

9) Der von links nach rechts fortschreitend zu berechnende Ausdruck

$$\alpha_1 \circ \alpha_2 \circ \ldots \circ \alpha_{r_1} \cup \beta_1 \cup \beta_2 \ldots \cup \beta_{s_1} \circ \alpha_{r_1+1} \circ \ldots \qquad (8)$$

ist gleich $A \cup B$, worin A durch thetische Verknüpfung aller α, B durch thetische Verknüpfung aller β entstanden ist und somit unabhängig von der Anordnung der in (8) vorgeschriebenen Operationen.

10) „Jeder Ausdruck, der durch ineinander geschachtelte fortschreitend zu berechnende Ausdrücke gebildet ist, wird so auf einen ohne Klammern geschriebenen Ausdruck reducirt, daſs man die Klammern am Anfange oder nach einem $\circ$ wegläſst, nach einem $\cup$ aber bei Entfernung der Klammern vor das erste Glied $\cup$ setzt und vor den übrigen die Zeichen $\circ$ und $\cup$ mit einander vertauscht."

Beweis. Offenbar brauchen wir nur einen fortschreitenden Ausdruck X zu betrachten, dessen Glieder entweder theils einfache Gröſsen theils fortschreitende Ausdrücke oder sämmtlich solche Ausdrücke sind. Wir beseitigen die darin befindlichen Klammern nacheinander und zwar in der Richtung von links nach rechts. Ist schon das erste Glied ein Ausdruck, so fallen seine Klammern einfach fort. Demnach hat man nur zu unterscheiden, ob die vor der ersten Klammer stehenden Gröſsen $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_m$ bloſs durch das Zeichen $\circ$ verknüpft sind (bez. nur eine Gröſse vorhanden ist) oder durch $\cup$, bezw. durch $\circ$ und $\cup$. Im ersten Falle beginnt X mit $A \circ \{N\}$ oder $A \cup \{N\}$, wo $A = \alpha_1 \circ \alpha_2 \circ \ldots \alpha_m$ und N ein Ausdruck von der Form (8). Wir können nun, in der Richtung von rechts nach links fortschreitend ein Glied von N nach dem anderen auſserhalb der Klammern bringen. Bezeichnet β_n das letzte Glied von N, so darf man N entweder gleich $\{N'\} \circ \beta_n$ oder $\{N'\} \cup \beta_n$ setzen. Man hat daher erstens entweder

$$A \circ \{N\} = A \circ [\{N'\} \circ \beta_n] = [A \circ \{N'\}] \circ \beta_n$$

oder

$$A \circ \{N\} = A \circ [\{N'\} \cup \beta_n] = [A \circ \{N'\}] \cup \beta_n$$

und so fortfahrend $A \circ \{N'\}$ entweder gleich $[A \circ \{N''\}] \circ \beta_{n-1}$ oder $[A \circ \{N''\}] \cup \beta_{n-1}$ u. s. w. Wenn endlich die Klammern in dem in Rede stehenden Theile von X verschwunden sind, so finden wir nach $\alpha_1 \circ \alpha_2 \circ \ldots \alpha_m \circ \beta_1$ die übrigen Glieder von N hinter denselben Zeichen, wie in N selbst. Aehnlich schließt man, wenn zweitens $A \cup \{N\}$ vorliegt. Es ist nämlich nach 4) — 6)

$$A \cup [\{N'\} \circ \beta_n] = [A \cup \{N'\}] \cup \beta_n,$$

$$A \cup [\{N'\} \cup \beta_n] = (A \circ \beta_n) \cup \{N'\} = [A \cup \{N'\}] \circ \beta_n.$$

Im zweiten Falle sei das Resultat aus den einfachen Größen, womit X beginnt, wie in 9) $A \cup \{B\}$. Weiter hat man dieselben Unterfälle zu unterscheiden, wie gerade vorhin und gelangt mit Hilfe der Relationen 7) und 8) zu denselben Ergebnissen. So findet man z. B.

$$\begin{aligned}[A \cup \{B\}] \circ [(N') \cup \beta_n] &= [A \circ \{N'\}] \cup [\{B\} \circ \beta_n] \\ &= A \circ \{N'\} \cup \{B\} \cup \beta_n \\ &= A \cup \{B\} \circ \{N'\} \cup \beta_n,\end{aligned}$$

worin man in dem Theile $A \cup \{B\}$ wieder die ursprüngliche Anordnung der Glieder α_r herstellen kann. — Sowie die Klammern um den ersten Ausdruck N in X sich wegschaffen lassen, so auch die um den zweiten, der nunmehr der erste geworden ist. U. s. f.

11)—13) Die den Sätzen 2)—4) in Nr. 4 entsprechenden.

9. Der Modulus der Thesis $\circ$ und die reciproke (inverse) Größe. Die Größe $\nu = a \cup a$, welche dem Systeme (I) oder (II) angehört, erfüllt die Gleichung $a \circ \nu = a$. Wenn b irgend eine Größe von (I), $\alpha = m \cup n$ eine solche von (II) bedeutet, so hat man $a \cup a = b \cup b$ also $b \circ \nu = b$ und

$$\alpha \circ \nu = (m \cup n) \circ \nu = (m \circ \nu) \cup n = m \cup n = \alpha.$$

Die Größe ν, welche die Eigenschaft besitzt, bei Verknüpfung mit irgend einer Größe des erweiterten Systemes sie ungeändert zu lassen, bezeichnen wir als Modulus der Thesis $\circ$. — Aus $\alpha \circ \nu = \alpha$ folgt ferner $\alpha = \alpha \cup \nu$, mag α zu (I) oder (II) gehören.

Die Größe $\nu \cup \alpha$ wird dagegen im Allgemeinen von α

verschieden sein; wir wollen sie die zur Gröſse α des erweiterten Systemes **reciproke** oder **inverse** nennen und mit $\bar{\alpha}$ bezeichnen. Die zu gleichen Gröſsen reciproken sind auch gleich. Es ist $\bar{\nu} = \nu$. Die Reciproke zu $\bar{\alpha}$ ist α. Denn man hat dafür

$$\bar{\bar{\alpha}} = \nu \cup \bar{\alpha} = \nu \cup (\nu \cup \alpha) = (\nu \circ \alpha) \cup \nu = \alpha.$$

Die Reciproke zu $\alpha \circ \beta$ ist $\bar{\alpha} \circ \bar{\beta}$; die zu $\alpha \cup \beta$ ist $\beta \cup \alpha$. In der That ergiebt sich

$$\overline{\alpha \cup \beta} = \nu \cup (\alpha \cup \beta) = (\nu \circ \beta) \cup \alpha = \beta \cup \alpha.$$

Endlich ist die Lysis $\alpha \cup \beta$ identisch mit der thetischen Verknüpfung von α mit der Reciproken zu β.

$$\alpha \circ \bar{\beta} = \alpha \circ (\nu \cup \beta) = (\alpha \circ \nu) \cup \beta = \alpha \cup \beta.$$

Im Innern eines fortschreitend zu berechnenden Ausdruckes, der stets als Resultat von Thesen angesehen werden kann, kann der Modulus nebst dem vor ihm stehenden Operationszeichen weggelassen werden, ohne daſs der Ausdruck eine Aenderung erleidet. Desgleichen am Anfange, wenn auf ihn das Zeichen $\circ$ folgt.

10. Bestehen über das Gröſsensystem (I) die Voraussetzungen A), B), C), D_1), E), so können wir noch folgendes festsetzen.

4. Definition. „Es sei die neue Gröſse $\alpha = m \cup n$ gröſser oder kleiner als a, und umgekehrt a kleiner oder gröſser als α, je nachdem m gröſser oder kleiner als $n \circ a$. α sei gröſser oder kleiner als eine andere Gröſse $\beta = p \cup q$ des Systemes (II), je nachdem $m \circ q$ gröſser oder kleiner als $n \circ p$."

Daſs diese Definition keinen Widerspruch mit den bisher angenommenen Eigenschaften des Gröſsensystemes (I) herbeiführt, zeigen die Sätze 5) und 6) in Nr. 5. — Ferner müssen die formalen Bedingungen in I. 3 erfüllt sein. In der That, mögen α, β Gröſsen 1. oder 2. Art sein, so folgt aus $\alpha \gtrless \beta$ stets $\alpha \lessgtr \beta$. Uud ist $\alpha \geqq \beta$, $\beta > \gamma$, so ist wirklich $\alpha > \gamma$. Denn ist $\gamma = r \cup s$, so hat man nach Voraussetzung

$$m \circ q \geqq n \circ p, \qquad p \circ s > q \circ r,$$

also nach Satz IV. in Nr. 5

$$m \circ q \circ p \circ s > n \circ p \circ q \circ r$$

und wenn $p \circ q$ beiderseits abgetrennt wird

$$m \circ s > n \circ r \quad \text{d. i.} \quad \alpha > \gamma.$$

Der Beweis gilt allgemein, da man auch Gröfsen des Systemes (I) in der Form $m \cup n$ darstellen kann. Doch mufs noch bemerkt werden, dafs wenn $\alpha \gtrless a = c \cup d$ auch

$$m \circ d \gtrless n \circ c.$$

Das folgt unmittelbar aus $m \gtrless n \circ a$ durch Verknüpfung beider Seiten mit d.

Satz VII. „Unter diesen Umständen hat man:

1) neben $\alpha > \alpha'$ $\qquad \alpha \circ \beta > \alpha' \circ \beta$.

2) $\alpha \circ \beta \gtrless \alpha$ je nachdem, $\beta = p \cup q$ gesetzt, $p \gtrless q$.“ Ist

$$\alpha = m \cup n \qquad \alpha' = m' \cup n',$$

so folgt

$$\alpha \circ \beta = (m \circ p) \cup (n \circ q) \qquad \alpha' \circ \beta = (m' \circ p) \cup (n' \circ q)$$

und wegen

$$m \circ n' > m' \circ n \qquad m \circ n' \circ p \circ q > m' \circ n \circ p \circ q$$

d. i.

$$\alpha \circ \beta > \alpha' \circ \beta.$$

Und es ist $\alpha \circ \beta \gtrless \alpha$, je nachdem

$$(m \circ p) \circ n \gtrless (n \circ q) \circ m$$

oder, bei Abtrennung von $m \circ n$ beiderseits, $p \gtrless q$.

11. Durch Anwendung der in den vorstehenden Nummern entwickelten Theorie kann man das System der natürlichen Zahlen dergestalt erweitern, dafs die vier Species mit einer einzigen Ausnahme stets ausführbar sind. Die Gesammtheit der natürlichen Zahlen und der neu zu schaffenden Gröfsen nennen wir das in Beziehung auf die vier Species geschlossene System der rationalen Zahlen. Die hierzu erforderlichen Definitionen und Beweise lassen sich auf doppelte Weise anordnen, je nachdem das System der natürlichen Zahlen zuerst in Bezug auf die Subtraction oder die Division erweitert wird. Für uns ist der letztere Weg etwas bequemer.[6])

Die Untersuchung zerfällt in vier Theile.

I. Aufstellung der absoluten gebrochenen Zahlen. Es seien nun die Gröfsen (I) $a, b, c \dots$ die natürlichen Zahlen. Die Gleichung $x \cdot b = a$ hat nach II, 8 entweder eine einzige oder gar keine Lösung unter den natürlichen Zahlen, wie die Theorie in Nr. 7 verlangt.

1. Definition. „In dem Falle, dafs die natürliche Zahl a durch eine andere b nicht theilbar ist, soll ein und nur ein neues Ding existiren, das mit $a : b$ oder $\frac{a}{b}$ bezeichnet wird und der Gleichung $b \cdot (a : b) = (a : b) \cdot b = a$ genügt."

2. Definition. „Es seien zwei dieser Dinge $a : b$, $a' : b'$ einander gleich, wenn $a \cdot b' = a' \cdot b$."

3. Definition. „Die neue Gröfse $a : b$ heifst gröfser oder kleiner als c, je nachdem a gröfser oder kleiner als $b \cdot c$ und zugleich die letztere kleiner oder gröfser als die erstere. Von den neuen Gröfsen $a : b$, $a' : b'$ heifst die erste die gröfsere oder kleinere, je nachdem $a \cdot b' \gtrless a' \cdot b$." (Vgl. Nr. 10.)

Die neuen Gröfsen $a : b$, welche im folgenden mit $\alpha, \beta, \gamma \dots$ bezeichnet werden, bilden im Verein mit den natürlichen Zahlen das System der absoluten rationalen Zahlen. Den ersteren gegenüber heifsen sie gebrochene Zahlen oder eigentliche Brüche. Oefters werden übrigens $\alpha, \beta, \gamma \dots$ absolute rationale Zahlen im Allgemeinen bedeuten.

Im Bruche $a : b$ heifst a auch Zähler, b auch Nenner. Falls $a > b$, also $a : b > 1$, so heifst der Bruch unecht; falls $a < b$, also $a : b < 1$, so heifst er echt.

Die Zahl $a : b$ ist gleich $ma : mb$. Ist m der gröfste gemeinschaftliche Theiler von a', b' so dafs $a' = ma$ $b' = mb$, worin a, b relativ prim sind, so folgt $a' : b' = a : b$. Jeder Quotient, in welchem Dividend und Divisor einen von der Einheit verschiedenen Theiler gemein haben, ist gleich einem solchen, in welchem Dividend und Divisor relativ prim sind.

Er heifst die reducirte Form desselben und giebt seinen Werth an.

„Sind zwei reducirte Quotienten $a:b$, $a':b'$ einander gleich, so mufs $a'=a$, $b'=b$ sein.“ Denn aus $ab'=a'b$ folgt, da b relativ prim zu a, dafs a' ein Vielfaches von a sein mufs: $a'=ma$. Setzt man diesen Werth für a' in der vorstehenden Gleichung ein, so ergiebt sich unmittelbar $b'=mb$. Allein da a' b' relative Primzahlen sind, so mufs $m=1$ sein. Aus dem soeben Bemerkten folgt noch: „Ist ein nicht reducirter Bruch $a':b'$ gleich dem reducirten $a:b$, so mufs $a'=ma$, $b'=mb$ d. h. b' dasselbe Vielfache von b, wie a' von a sein.“

Zwei oder mehrere gebrochene Zahlen können stets solchen Brüchen gleichgesetzt werden, die denselben Nenner haben. Sind die Brüche in reducirter Form $\frac{p}{q}\frac{p'}{q'},\ldots$, so können sie verwandelt werden in $\frac{mp}{mq}, \frac{m'p'}{m'q'}, \ldots$ Soll

$$mq = m'q' = \ldots = N$$

sein, so mufs N ein gemeinsames Vielfache der Nenner q, q' ... sein, was auch ausreicht.

Von zwei Brüchen mit gleichem Nenner ist derjenige gröfser, welcher den gröfseren Zähler hat; von zwei Brüchen mit gleichem Zähler ist derjenige gröfser, welcher den kleineren Nenner hat.

Nach dem Verfahren in Nr. 7 ergiebt sich als

4. Definition

$$(a:b)\cdot c = c\cdot(a:b) = ac:b$$
$$(a:b)\cdot(a':b') = aa':bb',$$

worin $(a:b)$, $(a':b')$ zunächst eigentliche Brüche sein sollen.

Nachdem dieses festgesetzt ist, ergiebt sich zufolge der Sätze VI. und VII. unmittelbar, dafs die Division in jedem Falle möglich und eindeutig sei und daher alle Regeln, die uns bei der Multiplication und Division der ganzen Zahlen in II. 6, 8 entgegengetreten sind, für die rationalen Zahlen beibehalten werden können und zwar in dem Sinne, dafs sie jetzt allgemeine Giltigkeit besitzen.

Modulus der Multiplication ist 1, also eine Gröfse des ursprünglichen Systemes. a und $1:a$, $a:b$ und $b:a$ sind reciproke (inverse) Zahlen, und ungleich im ersten Falle wenn a nicht 1; im zweiten, wenn a und b ungleich. — Mit einem Bruche wird dividirt, indem man mit der inversen Zahl multiplicirt.

12. II. Addition und Subtraction der absoluten rationalen Zahlen. Wie die Summe zweier Brüche mit demselben Nenner zu definiren ist, legt die vorletzte Formel in II. 8 nahe.

Satz. „Bringt man zwei Brüche α, β auf einen gemeinsamen Nenner: $\alpha = m:n$, $\beta = p:n$, so ist der Werth des Bruches $(m+p):n$ von der Wahl des Nenners n unabhängig.“

Denn ist auch

$$\alpha = m':n' \qquad \beta = p':n'$$

so hat man

$$mn' = m'n \qquad pn' = p'n,$$

also

$$n(m+p) = n(m'+p')$$

d. h.

$$(m'+p'):n' = (m+p):n.$$

5. Definition. „Unter der Summe $\alpha + \beta$ verstehen wir den soeben erwähnten Bruch $(m+p):n$.“

Die Bezeichnung „Summe“ ist völlig gerechtfertigt. Man hat nämlich

1) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.

2) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$, wie sofort sich ergiebt, wenn man die drei Brüche auf den gemeinsamen Nenner n bringt.

3) Aus $\alpha = \alpha'$ folgt $\alpha + \beta = \alpha' + \beta$. — Bringt man $\alpha\ \beta'$ auf einen gemeinsamen Nenner n, so ist $\alpha = \alpha' = m:n$.

4) $\alpha + \beta > \alpha$.

5) Aus $\alpha > \alpha'$ folgt $\alpha + \beta > \alpha' + \beta'$. — Ist n ein gemeinsamer Nenner von α, α', β $\alpha' = m':n$, so ist $m > m'$, also $m + p > m' + p$.

Satz. „Die Gleichung $\beta + \xi = \alpha$ hat eine und nur eine Lösung für ξ wenn $\alpha > \beta$, keine wenn $\alpha \overline{<} \beta$.“

Ist $\alpha > \beta$, so genügt es $\xi = \frac{m-p}{n}$ $(m > p)$ zu setzen. Die Eindeutigkeit der Differenz folgt unmittelbar aus Satz 5.

Nunmehr können wir nach Satz III. und IV. schliefsen, dafs die Regeln über Addition und Subtraction der natürlichen Zahlen, die wir in II, 3—5 kennen gelernt haben, unverändert für die absoluten rationalen Zahlen gelten, da die Bedingung, unter welcher die Differenz als möglich erscheint, formell dieselbe geblieben ist.

Noch zu erweisen sind die Regeln über die Multiplication und Division der Summen und Differenzen von rationalen Zahlen (vgl. II. 7).

1) $(\alpha + \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma$. — Nach dem Vorstehenden hat man

$$\alpha + \beta = (m + p) : n,$$

also wenn $\gamma = q : r$,

$$(\alpha + \beta)\,\gamma = q\,(m + p) : nr = (qm + qp) : nr$$
$$= qm : nr + qp : nr.$$

Aus diesem Satze folgen nach Satz V. die a. a. O. aufgestellten Regeln über die Multiplication der Summen und der Satz

$$\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha + \beta}{\gamma}.$$

2) Ist $\alpha > \beta$, so ist $(\alpha - \beta)\,\gamma = \alpha\gamma - \beta\gamma$. Beweis wie bei der vorhergehenden Formel. Nun ergiebt sich zunächst wie a. a. O. die Formel

$$\alpha > \beta \qquad \gamma > \delta \qquad (\alpha - \beta)(\gamma - \delta) = \alpha\gamma - \beta\gamma + \beta\delta - \alpha\delta$$

und nach Satz V. 4)

$$\alpha > \beta \quad \frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha - \beta}{\gamma}.$$

Satz. „Wenn $\alpha > \beta$ ist, so ist α entweder gleich dem Producte von β mit einer natürlichen Zahl g oder es läfst sich in einziger Weise auf die Form bringen $\alpha = g\beta + \varrho$, wo g wieder eine natürliche Zahl und der Rest $\varrho < \beta$ ist, so dafs nun $g\beta < \alpha < (g + 1)\,\beta$." — Bringt man nämlich α β auf einen gemeinsamen Nenner n, so dafs $\alpha = m : n$, $\beta = p : n$, so ist $p < m$, somit ist nach II, 8 m entweder ein Vielfaches von p $(m = gp)$ oder $m = gp + r$, wo r eine natürliche Zahl $< p$. Im ersten Falle hat man $\alpha = g\beta$, im zweiten $\alpha = g\beta + r : n$, wo $r : n < \beta$

— Setzt man in diesem Satze $\beta = 1$, so erhält man die Zerlegung des unechten Bruches α in eine ganze Zahl und einen echten Bruch als Rest.

13. III. Einführung der Null und der negativen Zahlen. Die Gleichung $\beta + \xi = \alpha$ hat im Systeme der absoluten rationalen Zahlen entweder eine einzige oder gar keine Lösung; demnach können die Definitionen von Nr. 7 und 10 nochmals benutzt werden.

6. Definition. „Im Falle dafs $\alpha \leqq \beta$, wird ein neues Ding angenommen und mit $\alpha - \beta$ bezeichnet, das die Gleichung $\beta + (\alpha - \beta) = (\alpha - \beta) + \beta = \alpha$ befriedigt."

7. Definition. „Es seien zwei dieser Dinge $\alpha - \beta$, $\alpha' - \beta'$ einander gleich, wenn $\alpha + \beta' = \alpha' + \beta$." — Ist $\alpha = \beta$, so mufs also $\alpha' = \beta'$; wenn $\alpha < \beta$, so $\beta - \alpha = \beta' - \alpha'$ sein.

8. Definition. „Die neue Gröfse $\alpha - \beta$ heifst kleiner als eine jede Zahl γ und letztere gröfser als die erstere (wegen $\beta + \gamma > \alpha$). Von den neuen Gröfsen $\alpha - \beta$, $\alpha' - \beta'$ heifst die erste gröfser oder kleiner als die zweite, je nachdem $\alpha + \beta' \gtrless \alpha' + \beta$."

Der Modulus der Addition d. i. die neue Gröfse $\alpha - \alpha$ heifst Null und erhält das Zeichen 0. Die übrigen neuen Gröfsen heifsen negative rationale Zahlen. Die neuen Gröfsen bilden mit den bereits definirten zusammen das System der rationalen Zahlen. Im Folgenden werden $A, B, \Gamma \ldots$ neue Gröfsen, manchmal aber auch rationale Zahlen im Allgemeinen bedeuten.

9. Definition. „Wenn $\alpha - \beta$, $\alpha' - \beta'$ neue Gröfsen bedeuten, so soll sein

$$(\alpha - \beta) + \gamma = \gamma + (\alpha - \beta) = (\alpha + \gamma) - \beta$$
$$(\alpha - \beta) + (\alpha' - \beta') = (\alpha + \alpha') - (\beta + \beta')."$$

Nach diesen Annahmen ergiebt sich zufolge der Sätze VI. und VII. sofort, dafs die Addition associativ und commutativ und die Subtraction in jedem Falle möglich und eindeutig sei und daher die schon in Nr. 12 erwähnten Additions- und Subtractionssätze uneingeschränkte Giltigkeit erlangt haben. Eine Ausnahme hiervon bildet ausschliefslich der Satz 4). Jetzt haben wir nämlich: „Es ist $A + B \gtrless A$, je nachdem $B \gtrless 0$ d. i. B positiv oder negativ ist" zufolge des neuen Satzes 5).

Wenn $\alpha - \beta$ eine negative Zahl, also $\alpha < \beta$ ist, so ist die zu ihr reciproke $\beta - \alpha$ eine absolute Zahl γ. Die Differenz $\alpha - \beta = 0 - \gamma$ stellt somit sämmtliche negative Zahlen vor. Das System der rationalen Zahlen besteht aufser der 0 aus zwei Reihen von Zahlen, den absoluten oder positiven und den negativen, von welchen eine jede zu einer der ersteren reciprok ist und ihr entgegengesetzt heifst. Die natürlichen Zahlen und die ihnen entgegengesetzten bilden mit der 0 das System der algebraischen ganzen Zahlen.

Es ist üblich, 0 am Beginne eines jeden Aggregates zu unterdrücken. So bezeichnet man die negative Zahl $0 - \gamma$ mit $-\gamma$. Dann schreibt man, wenn man den Gegensatz zwischen ihr und der positiven γ hervorheben will, statt γ, $+\gamma$. Demgemäfs kommen an einer rationalen Zahl $\pm\gamma$ in Betracht der absolute Betrag γ und das Zeichen: $+$ oder $-$, welche man jedoch nicht mit den Operationszeichen $+$ und $-$ verwechseln darf. Zur Vermeidung von Unterscheidungen legt man auch der Null einen absoluten Betrag bei, nämlich 0 und nennt ihn kleiner als jeden anderen. — Ist $m : n$ die reducirte Form von γ, so giebt $-\frac{m}{n}$ den Werth der negativen Zahl $-\gamma$ an. — Bedeutet A eine beliebige von 0 verschiedene rationale Zahl, so wird auch unter $-A$ die Differenz $0 - A$ verstanden. Man hat $-(-A) = A$.

Die Sätze in Nr. 8 und 9 liefern die praktischen Regeln für die Addition und Subtraction der rationalen Zahlen. „Die Summe gleichbezeichneter rationalen Zahlen wird erhalten, indem man ihre absoluten Beträge addirt und dieser Summe das gemeinschaftliche Zeichen der Addenden vorsetzt." — „Die Differenz zweier rationalen Zahlen wird gebildet, indem man zum Minuend die dem Subtrahend entgegengesetzte Zahl addirt." Daraus folgt, dafs $A - B >$ oder < 0, je nachdem $A >$ oder $< B$. — „Die Summe mehrerer rationalen Zahlen $A_1 + A_2 + \ldots + A_n$ wird berechnet, indem man zunächst die gleichbezeichneten Glieder addirt und wenn die absoluten Beträge dieser Summen vom einander verschieden sind, den kleineren von gröfseren abzieht und dem Reste das Zeichen des gröfseren vorsetzt. Sind die genannten Summen aber einander gleich, so ist der Ausdruck gleich 0."

$|A|$ bedeutet den absoluten Betrag der rationalen Zahl A.

1. Satz. Der absolute Betrag der Summe von rationalen Zahlen kann nicht gröfser sein als die Summe der absoluten Beträge derselben.

Der Satz gilt allgemein, wenn er für ein Binom richtig ist. Dafs aber $|A+B| \leqq |A| + |B|$, folgt aus dem Vorstehenden unmittelbar.

2. Satz. Ist $|A| > |B|$, so ist der absolute Betrag von $A+B$ nicht kleiner als $|A| - |B|$.

14. IV. Multiplication und Division der rationalen Zahlen. Um an den bisherigen Formeln nach Möglichkeit festzuhalten, müssen wir die Regeln in Nr. 12 über die Multiplication von Differenzen zur Definition der neuen Producte verwenden.

10. Definition. „Bedeuten $\alpha - \beta$, $\alpha' - \beta'$ Null oder negative Zahlen, so sei

$$(\alpha - \beta) \cdot \gamma = \gamma \cdot (\alpha - \beta) = \alpha\gamma - \beta\gamma \tag{1}$$

$$(\alpha - \beta) \cdot (\alpha' - \beta') = (\alpha\alpha' + \beta\beta') - (\alpha\beta' + \beta\alpha'), \tag{2}$$

worin die rechten Seiten durch jede ihnen bez. gleiche Zahl ersetzt werden können."

Satz. „Unter Voraussetzung der vorstehenden Formeln erweist sich das Product $A \cdot B$ als eine ausnahmslos commutative und associative Verknüpfung. — Es besteht ferner der Satz: „Neben $A = A'$ ist $A \cdot B = A' \cdot B$." (3) — Endlich sind erfüllt beide Seiten des distributiven Principes

$$(A \pm B) \cdot \Gamma = \Gamma \cdot (A \pm B) = A \cdot \Gamma \pm B \cdot \Gamma\text{."} \tag{4}$$

Beweis. Dafs $AB = BA$, folgt aus dem Anblicke der Formeln (1), (2). Der Nachweis der Relation

$$(AB)\,\Gamma = A\,(B\Gamma) \tag{5}$$

verlangt zunächst die Unterscheidung der in der Tafel (5) von Nr. 7 aufgeführten acht Fälle und die Ausdehnung der Formel (2) auf den Fall, dafs $\alpha - \beta$ eine positive, $\alpha' - \beta'$ Null oder eine negative rationale Zahl bedeutet. Das ergiebt sich hier unmittelbar, denn man hat, $\alpha - \beta = \gamma$ gesetzt, nach (1)

$$\begin{aligned}(\alpha - \beta)(\alpha' - \beta') &= \delta(\alpha' - \beta') = \delta\alpha' - \delta\beta' \\ &= (\alpha - \beta)\alpha' - (\alpha - \beta)\beta' \qquad (5^*) \\ &= (\alpha\alpha' - \beta\alpha') - (\alpha\beta' - \beta\beta') = (\alpha\alpha' + \beta\beta') - (\alpha\beta' + \beta\alpha').\end{aligned}$$

Dieses vorausgesetzt, folgt (5) sofort. Sind z. B. A, B, Γ sämmtlich nicht positiv und

$$A = \mu - \nu, \qquad B = \pi - \varkappa, \qquad \Gamma = \varrho - \sigma,$$

so folgt

$$AB = (\mu\pi + \nu\varkappa) - (\mu\varkappa + \nu\pi)$$

und

$$(AB)\,\Gamma = (\mu\pi\varrho + \mu\varkappa\sigma + \pi\sigma\nu + \varrho\nu\varkappa) - (\nu\varkappa\sigma + \nu\pi\varrho + \varkappa\varrho\mu + \sigma\mu\pi)$$

Der Ausdruck ändert sich bei Vertauschung der Paare $\mu\nu$, $\pi\varkappa$, $\varrho\sigma$ untereinander nicht, läfst sich somit auch als $(B\Gamma)\,A$ auffassen. Mit Rücksicht auf den folgenden Satz kann man diese Erörterung auch für die übrigen Fälle gelten lassen, da ja auch jede positive Zahl als eine Differenz darstellbar ist.

Beim Beweise des Satzes (3) sind die ebenfalls in Nr. 7 aufgeführten vier Fälle zu unterscheiden. Wenn z. B. A, B beide nicht positiv sind, so sei $A = \mu - \nu$, $A' = \mu' - \nu'$ und $\mu + \nu' = \mu' + \nu$. Man findet

$$\begin{aligned}AB &= (\mu\pi + \nu\varkappa) - (\nu\pi + \mu\varkappa) \\ A'B &= (\mu'\pi + \nu'\varkappa) - (\nu'\pi + \mu'\varkappa)\end{aligned}$$

und da

$$\begin{aligned}(\mu + \nu')\,\pi + (\mu' + \nu)\,\varkappa &= (\mu' + \nu)\,\pi + (\mu + \nu')\,\varkappa \\ (\mu\pi + \nu\varkappa) + (\nu'\pi + \mu'\varkappa) &= (\mu'\pi + \nu'\varkappa) + (\nu\pi + \mu\varkappa),\end{aligned}$$

schliefslich $AB = A'B$.

Bezüglich der Formel (4) sind die acht oben erwähnten Fälle auseinander zu halten. Es genügt übrigens für A, B, Γ beliebige Differenzen zu setzen. Man findet dann nach (2), bez. (5*)

$$\begin{aligned}(A + B)\,\Gamma &= \{(\mu + \pi) - (\nu + \varkappa)\}\,(\varrho - \sigma) \\ &= [\varrho(\mu + \pi) + \sigma(\nu + \varkappa)] - [\varrho(\nu + \varkappa) + \sigma(\mu + \pi)] \\ &= [(\varrho\mu + \sigma\nu) - (\varrho\nu + \sigma\mu)] + [(\varrho\pi + \sigma\varkappa) \\ &\quad - (\varrho\varkappa + \sigma\pi)] = A\Gamma + B\Gamma.\end{aligned}$$

Vertauscht man hier π und $\varkappa$, so erhält man wegen

$$\varkappa - \pi = -B \qquad (A - B)\,\Gamma = A\Gamma - B\Gamma.$$

Daraus folgt unmittelbar

$$(A - B)(A' - B') = AA' - BA' - AB' + BB'. \tag{6}$$

Setzt man in (1), (2) $\alpha = \beta$, so folgt die Formel

$$0 \cdot A = A \cdot 0 = 0, \tag{7}$$

worin A jede rationale Zahl sein kann. Ist $\alpha - \beta$ negativ, also $\beta = \alpha + \delta$, und $\beta\gamma = \alpha\gamma + \delta\gamma$, so zeigt (1), dafs

$$(-\delta)\,\gamma = \gamma\,(-\delta) = -\delta\gamma. \tag{8}$$

Ist auch $\alpha' - \beta'$ negativ, also $\beta' = \alpha' + \delta'$, sodafs

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' = \alpha\beta' + \beta\alpha' + \delta\delta',$$

so ergiebt sich aus (2)

$$(-\delta)(-\delta') = \delta\delta'. \tag{9}$$

Die Formeln (7)—(9) enthalten die Regeln über die Bildung der Producte rationaler Zahlen. Aus ihnen folgt der wichtige Satz: Ist ein Product $AB = 0$, so mufs mindestens einer der Factoren gleich 0 sein. Denn ist keiner derselben 0, so auch das Product nicht.

Die Formeln (8) und (9) gestatten die Verallgemeinerung zur algebraischen Zeichenregel: „Gleiche Zeichen geben bei der Multiplication $+$, ungleiche $-$“ d. h.

$$(-A)\,B = B\,(-A) = -AB, \qquad (-A)(-B) = -AB,$$

worin AB beliebige von Null verschiedene rationale Zahlen bedeuten. Diese Formeln können aus (4) und (6) mittelst (7) abgeleitet werden:

$$(0 - A)\,B = 0 \cdot B - A \cdot B = 0 - AB = -AB;$$
$$(0 - A)(0 - B) = 0 + AB = AB.$$

Division. „Die Gleichung

$$XB = A \tag{10}$$

hat, wenn B nicht 0 ist, eine und nur eine Auflösung $X = A : B$.“ — Ist $A = 0$, so mufs $X = 0$ sein. Ist aber

A nicht 0, so sind mit Rücksicht auf das Zeichen von A, B vier Fälle möglich, in deren jedem der Satz unmittelbar sich ergiebt. Sind z. B. A, B beide negativ

$$A = -\gamma, \quad B = -\delta,$$

so mufs X positiv sein: $X = \xi$ und weiter $\xi\delta = \gamma$ sein. Demnach mufs $X = \frac{\gamma}{\delta}$ sein, welche Zahl in der That der vorgelegten Gleichung genügt. — So findet man ferner

$$\frac{-\gamma}{\delta} = \frac{\gamma}{-\delta} = -\frac{\gamma}{\delta}.$$

Wenn in 10) $A = B = 0$, so kann X jede beliebige Zahl sein nach 7). Der Quotient $0:0$ ist vieldeutig und daher unbrauchbar.

Die Gleichung $X \cdot 0 = A$, wo $A \gtrless 0$, hat nach 7) keine Lösung unter den rationalen Zahlen. Man könnte nun meinen, dafs das System derselben noch einer Erweiterung fähig sei. Nach Nr. 7 würde man zunächst festsetzen, indem $A \cdot 0 = 0 \cdot B$, dafs die Quotienten $A:0$, was auch A aufser 0 sein mag, einander gleich seien. Hierauf wäre die Multiplication von $A:0$ mit einer rationalen Zahl B durch die Formel

$$(A:0) \cdot B = A \cdot B : 0$$

zu definiren, welche aber für $B = 0$ $0:0$, also nichts brauchbares liefert. Wir sehen daher von der Schaffung neuer Gröfsen $A:0$ ab und erklären die Division durch die Zahl 0 für unmöglich.

Zufolge der Sätze III. und V. gelten nunmehr auch für die rationalen Zahlen die schon in Nr. 11 und 12 erwähnten Regeln über die Multiplication und Division, abgerechnet jedoch die Ungleichungen in II. 6, 8, und zwar allgemein mit der einzigen Beschränkung, dafs kein Divisor Null sein darf.

Hinsichtlich der Ungleichungen beschränken wir uns auf den Satz: „Ist $A > A'$ und β eine positive Zahl, so ist sowol $A\beta > A'\beta$ als auch $A:\beta > A':\beta$.“ Man kann die Glieder jeder Ungleichung zwischen rationalen Zahlen mit einer positiven Zahl multipliciren oder durch eine solche dividiren. — Der Satz folgt daraus, dafs sowol $(A - A')\beta$, als auch $(A - A') : \beta$ positiv ist.

Satz. „Ist A eine beliebige rationale, β irgend eine positive Zahl, so ist A entweder das Product von β mit einer ganzen Zahl oder es läfst sich A in einziger Weise auf die Form bringen $A = G \cdot \beta + \varrho$, worin G eine ganze und ϱ eine positive Zahl kleiner als β bedeutet; demnach liegt A zwischen $G\beta$ und $(G + 1)\beta$. Wenn ϱ von $\frac{1}{2}$ verschieden ist, so hat man in einziger Weise auch $A = G' \cdot \beta + P$, unter G' eine ganze, unter P eine rationale Zahl zwischen $-\frac{1}{2}\beta$ und $\frac{1}{2}\beta$ verstanden.“ — Wenn $A < 0$ und $|A| : \beta$ keine ganze Zahl ist, so hat man $A : \beta = -m : n = -\left(g + \frac{r}{n}\right)$, wo $1 \leqq r < n$, also $A = (-g - 1)\beta + \varrho$, sodafs $0 < \varrho < \beta$. — Ist $\varrho > \frac{1}{2}\beta$, so setzt man die erstere Form in $A = (G + 1)\beta + (\varrho - \beta)$ um.

15. Wenn man bei Ertheilung der Prädicate gröfser und kleiner sich ausschliefslich an die Bedingungen 1)—5) in I. 3 halten würde, so könnten dieselben den rationalen Zahlen noch in anderer Weise verliehen werden, als es in Nr. 13 geschehen ist. Wir dürfen dann auch festsetzen: „Unter je zwei rationalen Zahlen von verschiedenem absoluten Betrage heifse diejenige gröfser, welcher der gröfsere absolute Betrag zukommt. Und von je zwei entgegengesetzten Zahlen sei die positive gröfser. Endlich heifse jede von 0 verschiedene Zahl gröfser als 0.“ — Aber unter dieser Voraussetzung würde der Satz: „Ist $A > A'$ so ist $A + B > A' + B$“ nicht mehr allgemein gelten. Daher kann die neue Ansicht nicht zugelassen werden.

16. Es ist nun ein System von Zahlen aufgestellt, in welchem die vier Species mit alleiniger Ausnahme der Division durch Null stets ausführbar sind; sonst gelten alle Regeln und Formeln ohne irgend eine Einschränkung. Aus diesem Grunde kann man die rationalen Zahlen auch algebraische nennen; denn erst jetzt ist das Rechnen mit Buchstaben, die nicht eine bestimmte darunter bedeuten, möglich geworden.

Sowie das System der rationalen Zahlen hier abgeleitet worden ist, besteht es aus zwei verschiedenartigen Theilen. Der eine, die natürlichen Zahlen, hat nach dem II. Abschnitte eine reale Bedeutung; der andere existirt nur auf dem Papiere. Die Zahl $\frac{3}{4}$ ist nichts anderes als dieses Zeichen, die Zahl 0 nichts anderes, als eines der Zeichen $1 - 1$, $2 - 2 \ldots$ u. s. f. Es ist indefs nicht schwer, diese Ungleichheit in dem Sinne zu beheben, dafs auch die natürlichen Zahlen als ein System von gesetzmäſsig vermittelst der beiden Zeichen 1 und + gebildeten Zeichen erscheinen.[7])

Wir erklären die Zahlen 2, 3... durch die Formeln $1+1=2$, $2+1=3$, $3+1=4$,..... und setzen fest, daſs jede Zahl gröſser sei als die vorhergehenden.

Die Herstellung der Summe $a+b$ und einer associativen und commutativen Addition verlangt nur die Annahme

$$a+(b+1)=(a+b)+1 \tag{I}$$

d. i. eines speciellen Falles des associativen Gesetzes. Nun läſst sich jede Summe recurrent berechnen (II. 3). Auch gilt die Formel

$$a+(b+c)=(a+b)+c \tag{α}$$

allgemein, wie leicht durch den Schluſs von n auf $n+1$ erhellt. Ist sie nämlich richtig, sowie sie in der That für $c=1$ gilt, so hat man nach (I)

$$\begin{aligned}(a+b)+(c+1) &= [(a+b)+c]+1\\ a+[b+(c+1)] &= a+[(b+c)+1]=[a+(b+c)]+1\end{aligned}$$

d. i.

$$(a+b)+(c+1)=a+[b+(c+1)].$$

Auf ähnliche Weise überzeugt man sich, daſs allgemein $a+b=b+a$.

Um das Product bloſs als Zeichen zu erklären, setzt man fest, daſs

$$a=a\cdot 1 \quad a+a=a\cdot 2 \quad a\cdot 2+a=a\,.\,3\ldots\ldots \quad a\cdot b+a=a\,.\,(b+1),$$

wornach man jedes Product $a\cdot b$ recurrent finden kann. Dann ergeben sich nach einander durch den Schluſs von n auf $n+1$ die beiden distributiven, das associative und commutative Gesetz der Multiplication d. h. die Formeln

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad (a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c \quad (ab)\cdot c=a\cdot(bc) \quad a\cdot b=b\cdot a.$$

Z. B. nehmen wir die erste Formel als richtig an, wie sie es für $c=1$ ist, so folgt nach (I) und (α)

$$\begin{aligned}a\,.\,[b+(c+1)] &= a\cdot[(b+c)+1] = a\cdot(b+c)+a\cdot 1\\ &=(a\cdot b+a\cdot c)+a\cdot 1=a\cdot b+(a\,.\,c+a\cdot 1)=a\cdot b+a\cdot(c+1)\end{aligned}$$

u. s. w.

Verbindet man diese Darstellung der Lehre von den natürlichen Zahlen mit den Entwickelungen in Nr. 11—14, so hat man eine Theorie der rationalen Zahlen, die lediglich vermittelst formaler Gesichtspunkte systematisch abgeleitet ist. Der Grundgedanke derselben, von einem gegebenem Gröſsensysteme zu einem weiteren, es umfassenden Begriffe dadurch aufzusteigen, daſs neue Objecte gesetzt und mit verständlichen Prädicaten ausgestattet werden, gehört schon dem

Alterthume an; hierin aber soweit zu gehen, daſs man mit den neuen Gröſsen so rechnen kann, wie mit den ursprünglichen, ist eine moderne Anwendung der alten Idee. Mit Recht kann man diese Theorie als analytisch bezeichnen im Gegensatze zu der im nächsten Abschnitte vorzuführenden Darstellung, welche zur Summe und zum Producte zweier rationalen Zahlen durch geometrische Betrachtungen gelangt. Während für sie die Addition und Multiplication eine anschauliche Bedeutung haben, so sind sie hier bloſse Gröſsenverknüpfungen, deren Natur die ihnen auferlegten formalen Gesetze bestimmen. Wir fordern übrigens nicht immer das Bestehen aller bisher beobachteten Gesetze; es soll vielmehr für die Addition das associative und für die Multiplication, der stets eine Addition der betrachteten Gröſsen vorausgehen muſs, die eine der beiden Seiten des distributiven genügen.

17.[8]) Nachdem die Theorie der rationalen Zahlen vollendet ist, erhebt sich sofort eine unabsehbare Menge von Aufgaben, welche durch keine von ihnen gelöst werden. In der Regel wird es nämlich nicht möglich sein, eine rationale Zahl X zu bestimmen, welche die Gleichung

$$A_0 X^m + A_1 X^{m-1} + \ldots + A_{m-1} X + A_m = 0 \qquad (1)$$

erfüllt, worin A_0, $A_1 \ldots A_m$ ganze Zahlen und X^r wie in II. 9 das Product von r Factoren X bedeutet. Schon die reine Gleichung $X^m = \alpha$, worin α, sowie im Folgenden β, $\gamma \ldots$, eine positive rationale Zahl ist, hat keine rationale Auflösung, wenn α nicht die m^{te} Potenz einer solchen Zahl ist. Sind nämlich in reducirter Form $\alpha = p : q$ und $X = x : y$, so hat man $q x^m = p y^m$, also muſs, da x^m y^m relative Primzahlen sind (II. 11), q ein Vielfaches von $y^m : q = k y^m$ und somit $p = k x^m$, also, da p q relative Primzahlen sind, $k = 1$ sein. Somit ergiebt sich $p = x^m$ $q = y^m$.

Man wird versuchen, neue Zahlen einzuführen, welche die noch ungelösten Gleichungen befriedigen und mit welchen zugleich so gerechnet werden kann wie mit den rationalen.

Zunächst nimmt man an, es gebe eine und nur eine Zahl, die absolute Quadratwurzel $\sqrt{\alpha}$, welche die Gleichung $X^2 = \alpha$ erfüllt; Quadratwurzeln aus gleichen rationalen Zahlen seien einander gleich und es sei $\sqrt{\alpha} \gtrless \gamma$, je nachdem $\alpha \gtrless \gamma^2$ und $\sqrt{\alpha} \gtrless \sqrt{\beta}$, je nachdem $\alpha \gtrless \beta$. Hierauf sind die vier Species für die neuen Zahlen zu untersuchen und zwar ist zuerst die Multiplication zu erklären, was durch die Formeln

$$\sqrt{\alpha} \cdot \gamma = \gamma \cdot \sqrt{\alpha} = \sqrt{\alpha\gamma^2} \qquad \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha\beta}$$

geschieht. Die Summe

$$\sqrt{\alpha} + \gamma = \gamma + \sqrt{\alpha}$$

sei eine neue Zahl, desgleichen

$$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha},$$

abgerechnet $\varkappa\sqrt{\varrho} + \lambda\sqrt{\varrho}$, welche Summe durch $(\varkappa + \lambda)\sqrt{\varrho}$ erklärt wird. Und es sei $\sqrt{\alpha} + \gamma = \sqrt{\alpha'} + \gamma'$ dann und nur dann, wenn $\alpha = \alpha'$ $\gamma = \gamma'$; $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha'} + \sqrt{\beta'}$ dann und nur dann, wenn $\alpha = \alpha'$ $\beta = \beta'$. Die weitere Vergleichung dieser neuen Zahlen unter einander und mit den positiven rationalen setzt die Kenntnifs des Satzes: „Zu jeder rationalen Zahl $\varepsilon > 0$ gehören rationale Zahlen $\xi > 0$, sodafs $| \xi^m - \alpha | < \varepsilon$“ voraus, den man mittelst der Formeln in VIII. 4 leicht beweisen wird. In der That genügt nun die Annahme: „Ist $\sqrt{\alpha} \gtrless \alpha'$ und entsprechend $\sqrt{\beta} \gtrless \beta'$, so sei auch

$$\sqrt{\alpha} + \gamma \gtrless \alpha' + \gamma \quad \text{und} \quad \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} \gtrless \alpha' + \beta'.“$$

Auch die dreigliederigen Summen, wie

$$(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}) + \sqrt{\gamma} = \sqrt{\alpha} + (\sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma}),$$

müfsten im Allgemeinen als neue Zahlen eingeführt werden u. s. f. Ist endlich jeder neuen Zahl die ihr entgegengesetzte zugeordnet, so darf man mit den Quadratwurzeln so rechnen, wie mit den rationalen Zahlen.

Ähnlich müfsten nacheinander die dritten, vierten..... Wurzeln geschaffen werden, entsprechend den Gleichungen $X^3 = \alpha$, $X^4 = \alpha$.... Dann wären auch andere Gleichungen (1) in Betracht zu ziehen, wobei es, wie bei $X^2 + \alpha^2 = 0$, vorkommen kann, dafs man die Vergleichung der neuen Zahlen mit den rationalen gar nicht zu Stande bringt. — Diejenigen unter den so gewonnenen Zahlen, welche mit den rationalen vergleichbar sind, heifsen irrationale. Hat man irgend welche Classen derselben definirt und mit eigenen Bezeichnungen versehen, so stellen sich ähnliche Aufgaben ein, indem man jetzt annehmen wird, dafs die Coefficienten in (1) Polynome seien, deren Glieder auch die neuen Zahlen enthalten. U. s. f. Es ist klar, dafs man nach der bis jetzt befolgten Methode der Zahlenbildung keine Übersicht über die irrationalen Zahlen erlangen kann. Wir werden aber sehen, dafs dieselben sowol bei analytischer als auch bei synthetischer Darstellung aus einer Quelle hergeleitet werden können.

Wenn wir darauf verzichten, das Zahlensystem auf dem angegebenen Wege zu erweitern, so erklären wir damit zugleich, dafs es aufser den vier Species keine Grundoperationen der Arithmetik gebe. Daher werden wir von der dritten Stufe derselben, bestehend aus den Operationen des Potenzirens, Radicirens, Logarithmirens, nicht weiter sprechen. Die Potenz soll vielmehr als eine Function des Exponenten aufgefafst werden (IX. 3).

IV. Abschnitt.

Synthetische Theorie der rationalen Zahlen.

1. Die gebrochenen absoluten Zahlen. Im zweiten Abschnitte, an den dieser unmittelbar angeschlossen werden kann, sind wir von einer Schaar unter sich gleicher Dinge ausgegangen, welche später als benannte Einheiten bezeichnet wurden. Nunmehr nehmen wir an, jedes derselben lasse sich in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zerlegen und die gleichvielten Theile verschiedener Einheiten derselben Art seien auch einander gleich. D. h. alle diese Einheiten sind anzusehen als gleiche Vielheiten von Untereinheiten in beliebiger Anzahl. Indem wir die abstracte Einheit 1 der folgenden Erörterung zu Grunde legen, betrachten wir, was auch b für eine natürliche Zahl > 1 sein mag, 1 als eine Vielheit von b Untereinheiten, deren jede der Stammbruch $\frac{1}{b}$ heiſst und schreiben vorläufig, $\frac{1}{b}$ gegenüber 1 als eine neue nach dem „Nenner" b benannte Einheit ansehend,

$$1) \qquad b\left(\frac{1}{b}\right) = \frac{b}{b} = 1.$$

Zunächst ergeben sich die folgenden Sätze, worin a, b, $c\ldots$ wieder natürliche Zahlen bedeuten.

2) „Jede natürliche Zahl $a > 1$ läſst sich, auch wenn sie kein Vielfaches von b ist, in b gleiche Theile zerlegen und zwar ist ein jeder $\frac{a}{b}$." Denn die aus a Untereinheiten $\frac{1}{b}$ gebildete Menge, welche mit $\frac{a}{b}$ bezeichnet wird, giebt b-mal gesetzt a Einheiten. D. i.

$$b\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{ab}{b} = a.$$

Auch $\frac{a}{b}$ heiſst ein Bruch, b sein Nenner, a sein Zähler.

3) „Das c-fache von $\frac{a}{b}$ ist $\frac{ac}{b}$."

Wir setzen ferner fest, daſs auch die gleichvielten Theile der von 1 verschiedenen Zahlen einander gleich seien. D. h. Sind

$$q\left(\frac{a}{b}\right) = p \qquad q\left(\frac{a'}{b'}\right) = p,$$

so ist

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}.$$

Aus den ersteren Gleichungen folgt

$$qa = pb, \qquad qa' = pb',$$

somit

$$qab' = pbb' = qa'b \quad \text{d. i.} \quad ab' = a'b.$$

Aus der letzten Gleichung ergiebt sich umgekehrt

$$b\left(\frac{a'}{b'}\right) = \frac{a'b}{b'} = \frac{ab'}{b'} = a, \quad \text{also} \quad \frac{a'}{b'} = \frac{a}{b}.$$

Demnach sind zwei Brüche $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$ dann und nur dann einander gleich, wenn $ab' = a'b$. Aus dieser Definition folgt wie in III. 11, daſs gleichen Brüchen eine und dieselbe reducirte Form entspricht. Man hat darnach ferner

4) $$\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}.$$

5) „Zwei oder mehrere rationale Zahlen lassen sich auf einen gemeinsamen Nenner bringen" d. h. als Vielheiten eines und desselben Stammbruches darstellen. Jedes gemeinschaftliche Vielfache der vorkommenden Nenner liefert einen für alle Zahlen passenden Nenner und wenn die Brüche in die reducirte Form gebracht sind, nur ein solches. Hieraus ergiebt sich nach II. 2 die Vergleichung von je zwei ungleichen absoluten rationalen Zahlen $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$. Indem

$$\frac{a}{b} = \frac{ab'}{bb'}, \qquad \frac{a'}{b'} = \frac{a'b}{bb'};$$

so ist $\frac{a}{b}$ gröſser oder kleiner als $\frac{a'}{b'}$, je nachdem ab' gröſser oder kleiner $a'b$. Es ist jedoch noch zu zeigen, daſs diese Definitionen von der Wahl des gemeinsamen Nenners unabhängig seien. Gehen wir von den reducirten Formen der beiden Zahlen

$$\frac{a}{b} = \frac{p}{q}, \quad \frac{a'}{b'} = \frac{p'}{q'}$$

aus und nehmen z. B. an es sei $pq' > p'q$. Da

$$a = kp \qquad b = kq, \qquad a' = k'p' \qquad b' = k'q';$$

so ergiebt sich aus

$$kk'pq' > kk'p'q \qquad ab' > a'b.$$

6) „Auch die gebrochene Zahl $\frac{a}{b}$ läſst sich in $d > 1$ gleiche Theile zerlegen und zwar ist ein jeder der Bruch $\frac{a}{bd}$." — Denn man hat

$$d\left(\frac{a}{bd}\right) = \frac{ad}{bd} = \frac{a}{b}.$$

7) „$\frac{c}{d}$ von $\frac{a}{b}$ ist $\frac{ac}{bd}$." — Denn man hat

$$\frac{c}{d}\left(\frac{a}{b}\right) = c\left\{\frac{1}{d}\left(\frac{a}{b}\right)\right\} = c\left(\frac{a}{bd}\right) = \frac{ac}{bd}.$$

8) „Jede Zahl $\frac{e}{f}$ läſst sich als Bruch von jeder anderen $\frac{a}{b}$ auffassen." — Zufolge der Gleichung

$$\frac{be}{af}\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{e}{f}.$$

2. Die Addition der absoluten rationalen Zahlen wird dadurch ausgeführt, daſs man alle Summanden als Vielheiten einer Untereinheit darstellt d. h. man bringt sie auf einen gemeinsamen Nenner und addirt die neuen Zähler. Daſs der Werth des so erhaltenen Resultates von der Wahl dieses Nenners nicht abhängt, ist bereits III. 12 bemerkt. Wir finden somit die nämlichen Regeln wie bei der Addition der natürlichen Zahlen. Ein Gleiches gilt von der Subtraction der neuen Zahlen.

3. Die Multiplication eines Bruches mit einer ganzen Zahl lehren die Regeln 1)—3) der Nr. 1, welche wir jetzt so schreiben

$$\frac{1}{b} \cdot b = 1, \quad \frac{1}{b} \cdot a = \frac{a}{b}, \quad \frac{a}{b} \cdot c = \frac{ac}{b}.$$

Die Multiplication mit einem Bruche wird häufig durch die Definition eingeführt: „$\frac{a}{b}$ mit $\frac{c}{d}$ multipliciren bedeute, eine Zahl aus $\frac{a}{b}$ so ableiten, wie der Multiplicator $\frac{c}{d}$ aus 1 entstanden ist.“ Dann zeigt die Formel 7) daſs

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Allein diese Erklärung des genannten Productes ist nicht anschaulich, sondern wieder formal. Synthetisch müſste unser Product als Flächenzahl abgeleitet werden zufolge des Satzes: Theilt man zwei parallele Seiten eines Rechteckes in je a, die beiden andern in je b gleiche Theile und zieht durch die Theilungspunkte Parallele zu den Seiten, so zerfällt das Rechteck in $a \cdot b$ congruente Rechtecke. Jetzt leuchtet ein, daſs $\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}$ der ab^{te} Theil der Flächeneinheit sein muſs u. s. f.[1])

4. Die relativen rationalen Zahlen. Manchmal lassen sich aus den rationalen Zahlen von einer Benennung durch Hinzufügung einer weiteren Bestimmung zwei Reihen von benannten Zahlen ableiten, entspringend aus zwei Einheiten, welchen selbst sowie je zwei Zahlen der beiden Reihen vom nämlichen numerischen Werthe die Eigenschaft beigelegt wird, daſs sie bei ihrer Vereinigung sich vernichten. Daher heiſsen je zwei solche Zahlen einander entgegengesetzt oder kürzer „Zahl und Gegenzahl“. Beispiele eines solchen Gegensatzes bieten dar: Vermögen und Schulden, die geradlinigen Wege vor- und rückwärts. Von jeder Besonderheit absehend, bezeichnen wir die Einheit mit 1, die Gegeneinheit mit $\overline{1}$; eine Zahl mit α, ihre Gegenzahl mit $\bar{\alpha}$, bez. mit A und $\overline{A}$, wo A sowol der ersten, als auch der zweiten Reihe angehören kann. Zu den so erhaltenen Zahlen fügen wir noch die uneigentliche (formale) Zahl 0, welche sogleich erklärt werden wird. — Wir sagen, zwei relative Zahlen sind einander gleich, wenn sie gleich viele

Einheiten bez. Untereinheiten derselben Reihe enthalten. Die positiven, d. i. die aus 1 entspringenden Zahlen nennen wir gröſser als 0, die negativen d. i. die aus $\overline{1}$ entspringenden kleiner als 0; und jede positive (negative) Zahl gröſser (kleiner) als jede negative (positive). Die positiven Zahlen werden untereinander verglichen wie die absoluten. Von je zwei negativen Zahlen heiſst gröſser (kleiner) die Zahl vom kleineren (gröſseren) absoluten Betrage. — Nunmehr folgt aus $A > B$ stets $\overline{A} < \overline{B}$, wenn $A, B \ldots$ beliebige relative Zahlen bedeuten.

5. Die vier Species für die relativen Zahlen. — Die Summe je zweier solcher Zahlen wird folgendermaaſsen erklärt. Zunächst sagt man $\alpha + \bar{\alpha} = 0$ (bez. $A + \overline{A} = 0$). Ferner sei $A + 0 = 0 + A = A$. In den übrigen Fällen hat man auſser dem bereits bekannten $\alpha + \beta$

$$\bar{\alpha} + \bar{\beta} = \overline{\alpha + \beta}, \quad \alpha + \bar{\beta} = \bar{\beta} + \alpha = \begin{cases} \alpha - \beta, & \text{wenn } \alpha > \beta, \\ \overline{\beta - \alpha}, & \text{wenn } \alpha < \beta. \end{cases}$$

Daraus erkennt man, daſs allgemein

$$\overline{A} + \overline{B} = \overline{A + B} \tag{a}$$

also $A + B$ und $\overline{A} + \overline{B}$ einander entgegengesetzt seien.

Etwas umständlich gestaltet sich hier der Nachweis, daſs die soeben definirte Verknüpfung unter den neuen Zahlen den formalen Gesetzen der Addition gehorche. Es ergiebt sich zwar sofort, daſs

$$1) \qquad A + B = B + A;$$

aber hinsichtlich des Beweises der associativen Formel

$$2) \qquad (A + B) + \Gamma = A + (B + \Gamma)$$

sind mehrere Fälle zu unterscheiden. Sie ist offenbar richtig, wenn einer der drei Summanden 0 ist. Ist 0 nicht darunter, so reducirt man die acht, vermöge der Natur der Zahlen $AB\Gamma$ möglichen Fälle zunächst mittelst der Gleichung (a), welche zeigt, daſs neben 2) auch

$$(\overline{A} + \overline{B}) + \overline{\Gamma} = \overline{A} + (\overline{B} + \overline{\Gamma}), \tag{b}$$

auf die folgenden drei: $\alpha, \beta, \bar{\gamma}$; $\alpha, \bar{\beta}, \gamma$; $\alpha, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$ und diese auf den ersten. Angenommen nämlich, es sei

$$(\alpha + \beta) + \bar{\gamma} = \alpha + (\beta + \bar{\gamma}), \tag{c}$$

so hat man

$$(\beta + \alpha) + \bar{\gamma} = (\beta + \bar{\gamma}) + \alpha,$$

also auch

$$(\alpha + \bar{\beta}) + \gamma = (\alpha + \gamma) + \bar{\beta} = \alpha + (\gamma + \bar{\beta}) = \alpha + (\bar{\beta} + \gamma)$$

d. i. der zweite Fall. Endlich folgt aus (c) vermöge (b)

$$(\bar{\alpha} + \bar{\beta}) + \gamma = \bar{\alpha} + (\bar{\beta} + \gamma)$$

oder

$$(\gamma + \bar{\beta}) + \bar{\alpha} = \gamma + (\bar{\beta} + \bar{\alpha})$$

d. i. der dritte Fall. Die Formel (c) mufs durch Berechnung ihrer beiden Seiten verificirt werden. Links steht, je nachdem $\alpha + \beta \gtreqless \gamma$

$$(\alpha + \beta) - \gamma, \quad 0, \quad \overline{\gamma - (\alpha + \beta)}.$$

Ist im ersten Falle $\beta > \gamma$, so kommt auch rechts

$$\alpha + (\beta \dot{-} \gamma) = (\alpha + \beta) - \gamma$$

u. s. f. — Unmittelbar ergiebt sich: 3) Neben $A = A'$ ist

$$A + B = A' + B.$$

Um den Satz: 4) „Ist $A > A'$, so ist

$$A + B > A' + B,\text{“}$$

zu zeigen, sind nach Erledignng der Fälle, wo mindestens eine der Zahlen A, A', B 0 ist, noch sechs zu unterscheiden, welche sich leicht auf den direct zu verificirenden Satz: „Neben $\alpha > \alpha'$ ist

$$\alpha + \bar{\beta} > \alpha' + \bar{\beta}\text{“}$$

zurückführen lassen.

Bezüglich der Subtraction gilt wieder das in III. 13 Gesagte. Die Gleichung $X + B = A$ wird gelöst durch die Zahl $X = A + \bar{B}$ und in Folge des Satzes 4) nur durch sie. Es ist $\bar{A} = 0 - A$, wofür man $-A$ schreibt.

Das Product $A \cdot B$ wird in der Regel durch die Definition: „A mit B multipliciren bedeute, aus der Zahl A und ihrer Gegenzahl $-A$ eine Zahl so ableiten, wie der Multiplicator B aus der Einheit und der Gegeneinheit entstanden ist“ eingeführt. Dieses Verfahren hat, den Fall ausgenommen dafs B eine natürliche Zahl ist, eigentlich formalen Charakter.[2])

6. Die systematischen Brüche. — Versteht man wie in II. 10 unter e eine natürliche Zahl $\geqq 2$, unter c_0 eine ganze Zahl $\gtrless 0$, unter $c_1, c_2 \ldots c_m$ Ziffern d. i.

$$0 \leqq c_n \leqq e - 1;$$

so nennt man den Bruch

$$A = c_0 + \frac{c_1}{e} + \frac{c_2}{e^2} + \cdots + \frac{c_m}{e^m} \tag{1}$$

einen systematischen. Bricht man bei dem Gliede

$$c_n : e^n \; (n < m)$$

ab, so ist der Rest kleiner als $1 : e^n$. Mit Hilfe der leicht zu beweisenden Formel (vgl. VIII. 1)

$$(\omega \gtrless 1) \quad \frac{1 - \omega^n}{1 - \omega} = 1 + \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^{n-1} \tag{2}$$

findet man nämlich

$$\begin{aligned} \frac{c_{n+1}}{e^{n+1}} + \cdots + \frac{c_m}{e^m} &\leqq \frac{e-1}{e^{n+1}} \left\{ 1 + \frac{1}{e} + \cdots + \frac{1}{e^{m-n-1}} \right\} \\ &= \frac{1}{e^n} - \frac{1}{e^m} < \frac{1}{e^n}. \end{aligned} \tag{3}$$

1. Satz. „Jede rationale Zahl A (in die Form $a : b$ gebracht, wo b eine natürliche und zu $|a|$ relativ prime Zahl bedeutet) ist entweder gleich einem systematischen Bruche oder es giebt neben der ganzen Zahl c_0, wofür

$$c_0 < A < c_0 + 1,$$

eine unbegrenzte Reihe von Ziffern $c_1, c_2 \ldots c_n$ — welche nicht von einer bestimmten an sämmtlich 0 sind —, so dafs wie grofs auch n sein mag, stets

$$c_0 + \frac{c_1}{e} + \cdots + \frac{c_n}{e^n} < A < c_0 + \frac{c_1}{e} + \cdots + \frac{c_n + 1}{e^n}.\text{“} \tag{4}$$

„In der Reihe $c_1, c_2 \ldots$ wiederholt sich von einem bestimmten Gliede an fortwährend eine aus höchstens $b - 1$ Ziffern bestehende Gruppe.“

Nach III. 14 hat man entweder $a = c_0 b$, wo c_0 eine ganze Zahl oder $a = c_0 b + r_0$, worin r_0 eine natürliche Zahl $< b$. Im ersten Falle ist $A = c_0$; im zweiten, wo

$$c_0 < A < c_0 + 1,$$

bildet man er_0 und findet entweder $er_0 = c_1 b$ oder

$$er_0 = c_1 b + r_1,$$

wo c_1 eine ganze Zahl: $0 \leqq c_1 \leqq e - 1$ und r_1 eine solche zwischen 1 und $b - 1$ bedeutet. Im ersten Falle ist

$$A = c_0 + \frac{c_1}{e};$$

im zweiten, wo

$$c_0 + \frac{c_1}{e} < A < c_0 + \frac{c_1 + 1}{e},$$

bildet man er_1 und vollzieht die analoge Disjunction. U. s. f. Hierbei kann sich nur Folgendes ergeben. Entweder geht eine der Divisionen

$$\frac{a}{b} = c_0 + \frac{r_0}{b}, \quad \frac{er_0}{b} = c_1 + \frac{r_1}{b}, \quad \frac{er_1}{b} = c_2 + \frac{r_2}{b}, \ldots\ldots,$$

$$\frac{er_n}{b} = c_{n+1} + \frac{r_{n+1}}{b} \ldots\ldots$$

auf; dann ist A gleich einem systematischen Bruche. Oder es geht keine derselben auf, so dafs die Reste $r_0, r_1 \ldots$ nur die Werthe $1, 2, \ldots b - 1$ erhalten können. Demnach mufs m in der Reihe der b Reste $r_0, r_1 \ldots r_{b-1}$ einen ersten r_m geben, der wiederkehrt. Ist aber $r_{m+h} = r_m$, so folgt auch

$$c_{m+h+1} = c_{m+1}, \quad r_{m+h+1} = r_{m+h} \ldots c_{m+2h} = c_{m+h},$$

$$r_{m+2h} = r_{m+h} = r_m.$$

U. s. f. In der Reihe $c_{m+1}, c_{m+2} \ldots$ wiederholen sich ohne Ende die $h \leqq b - 1$ Ziffern

$$c_{m+1}, \; c_{m+2} \ldots c_{m+h}.$$

Die Zahl

$$c_{m+1}e^{h-1} + c_{m+2}e^{h-2} + \cdots + c_{m+h}$$

heifst die zur Zahl A gehörige Periode.

Dafs die Zahl A nur einem systematischen Bruche gleich sein kann, folgt leicht aus (3). Angenommen, es sei auch noch

$$A = d_0 + \frac{d_1}{e} + \ldots + \frac{d_n}{e^n};$$

so mufs neben $c_0 \leqq A < c_0 + 1$ auch $d_0 \leqq A < d_0 + 1$ sein, d. i. $c_0 < d_0 + 1$ und $d_0 < c_0 + 1$. Hieraus folgt $c_0 = d_0$, da c_0, d_0 ganze Zahlen sind. Nun hat man nach (3) ferner

$$\frac{c_1}{e} \leqq A - c_0 < \frac{c_1 + 1}{e}, \quad \frac{d_1}{e} \leqq A - c_0 < \frac{d_1 + 1}{e},$$

d. i. $c_1 < d_1 + 1$ neben $d_1 < c_1 + 1$ also auch $c_1 = d_1$ u. s. f. So viele Stellen, als beide Brüche gemein haben, stimmen überein; folglich mufs auch $m = n$ sein. Auf ähnliche Weise wird mit Hilfe der Formel (4) gezeigt, dafs es im zweiten Falle nur eine Reihe c_0, c_1, $c_2 \ldots$ geben könne.

2. Satz. „Die Zahl A ist dann und nur dann gleich einem systematischen Bruche, wenn ihr Nenner nur Primfactoren von e enthält."

3. Satz. „Ist b relativ prim zu e, so beginnt die Periode mit c_1 und umgekehrt."

Wäre $m \geqq 1$, so hätte man neben

$$e r_{m-1} = c_m b_m + r_m \qquad e r_{m+h-1} = c_{m+h} b + r_m,$$

also

$$e\,(r_{m-1} - r_{m+h-1}) = b\,(c_m - c_{m+h}),$$

was nicht möglich ist, wenn b, e relative Primzahlen sind; denn es müfste $|r_{m-1} - r_{m+h-1}|$ d. i. eine Zahl, kleiner als b, durch b theilbar sein (II. 11). Also mufs $m = 0$ sein. — Ist $m = 0$ $r_h = r_0$, so folgt aus $a = c_0 b + r_0$, $r_{h-1} e = c_h b + r_0$

$$a - e r_{h-1} = b\,(c_0 - c_h);$$

demnach mufs jeder gemeinsame Theiler von b, e in a aufgehen, also kann es aufser 1 keinen geben. — Daraus folgt unmittelbar der

4. Satz. „Sind die Primfactoren von b theils solche von e, theils nicht, so müssen der Periode Ziffern vorangehen, die mindestens in derselben Ordnung nicht wiederholt werden."

7. Es frägt sich noch, ob umgekehrt zu jeder unbegrenzten Reihe c_0, c_1, $c_2 \ldots$ welche die im 1. Satze angegebene Beschaffenheit hat, eine rationale Zahl A gehört, welche die Relationen (4) erfüllt.

5. Satz. „Neben der beliebigen ganzen Zahl c_0 sei gegeben die unbegrenzte Reihe von Ziffern c_1, $c_2 \ldots$, welche von dem Gliede c_{m+1} an gebildet wird durch Wiederholung der Gruppe c_{m+1}, $c_{m+2} \ldots c_{m+h}$ mit mindestens einer geltenden Ziffer, die die Periode

$$P = c_{m+1} e^{h-1} + c_{m+2} e^{h-2} + \cdots + c_{m+h-1} e + c_{m+h}$$

liefert. Setzt man für $n = 0, 1, 2 \ldots$

$$c_0 + \frac{c_1}{e} + \cdots + \frac{c_n}{e^n} = S_n\,,$$

$$c_0 + \frac{c_1}{e} + \cdots + \frac{c_m}{e^m} = S_m = \frac{Q}{e^m}$$

und bildet den Bruch

$$A = \frac{(Qe^h + P) - Q}{(e^h - 1)\,e^m}, \tag{5}$$

so findet man, falls nicht $h = 1$ und $P = e - 1$, stets, was auch n sein mag,

$$S_n < A < S_n + \frac{1}{e^n}.$$

In dem ausgeschlossenen Falle hat man wenn $m \geqq 1$,

$$S_n < \frac{Q+1}{e^m} \leqq S_n + \frac{1}{e^n}, \tag{6}$$

worin das obere Zeichen nur für $n < m$ steht."

„Beginnt die Periode mit c_1, so hat man in (5) $m = 0$ $Q = c_0$ und wie auch sonst $e^0 = 1$ zu setzen. (6) geht über in

$$c_0 + 1 = S_n + \frac{1}{e^n}.\text{“}$$

Beweis. Es ist unmittelbar ersichtlich daſs

$$S_{n+k} \geqq S_n. \tag{7}$$

Dagegen hat man nach (3)

$$S_{n+k} + \frac{1}{e^{n+k}} \leqq S_n + \frac{1}{e^n}. \tag{8}$$

Setzt man $1 : e^h = \omega$, so folgt nach (2) und (5)

$$\begin{aligned} S_{m+rh} &= S_m + \frac{P}{e^{m+h}} + \frac{P}{e^{m+rh}} + \cdots + \frac{P}{e^{m+rh}} \\ &= S_m + \frac{P}{e^{m+h}} \cdot \frac{1-\omega^r}{1-\omega} = A - \frac{P}{(e^h - 1)\,e^{m+rh}}, \end{aligned} \tag{9}$$

also $S_{m+rh} < A$. Da wie groſs auch n sein mag, eine Zahl

r zu finden ist, so dafs $n < m + rh$, so hat man nach (7) $S_n \leqq S_{m+rh} < A$ d. h. $S_n < A$.

Es ergiebt sich ferner aus (9), dafs

$$S_{m+rh} + \frac{1}{e^{m+rh}} = A + \frac{1}{e^{m+rh}}\left(1 - \frac{P}{e^h - 1}\right). \qquad (10)$$

Wenn nicht $h = 1$ und $P = e - 1$, so ist $P < e^h - 1$, somit

$$S_{m+rh} + \frac{1}{e^{m+rh}} > A,$$

also nach (8)

$$S_n + \frac{1}{e^n} > A.$$

Im Falle $h = 1 \quad P = e - 1$ hat man

$$A = (Q + 1) : e^m = S_m + 1 : e^m$$

und nach (10)

$$S_{m+r} + \frac{1}{e^{m+r}} = A.$$

Wenn $m \geqq 1$, so mufs c_m von $e - 1$ verschieden sein; demnach ist nach (8)

$$A = S_m + \frac{1}{e^m} < S_n + \frac{1}{e^n} \quad (n < m).$$

V. Abschnitt.

Absolute, relative, stetige Gröfsen.

1. Absolute Gröfsen. Wir werden zunächst erörtern, welche Eigenschaften allen Systemen von geometrischen Gröfsen d. i. den Linien, Winkeln, Flächen, Körpern abgesehen von der Ausdehnung zukommen. Die Vielheiten von einer Benennung oder discreten Gröfsen fassen wir mit ihnen zusammen. Ferner handelt es sich um Ermittelung der notwendigen und hinreichenden Eigenschaften d. i. derjenigen, aus welchen die übrigen von selbst hervorgehen. Die Gröfsen irgend eines dieser Systeme, im Folgenden mit A, B, C... bezeichnet, erfüllen die nachstehenden Forderungen.

I.) Je zwei derselben können entweder als gleich oder ungleich und im letzteren Falle kann die eine als die gröfsere, die andere als die kleinere bezeichnet werden.

II.) Die Gröfsen lassen sich addiren (und vervielfachen) wie die natürlichen Zahlen, insbesondere ist die Summe je zweier eine Gröfse des Systemes.

III.) Falls $A > B$, so existirt im Systeme eine und nur eine Gröfse X, so dafs $B + X = A$.

IV.) Jede Gröfse A ist entweder beschränkt oder unbeschränkt in gleiche und mit ihr gleichartige Theile zerlegbar d. h. es giebt im Systeme eine Gröfse X, so dafs $nX = A$, worin n entweder jede oder auch nur gewisse natürliche Zahlen bedeuten kann.

V.) Ist $A > B$, so giebt es ein Vielfaches von B, das gröfser ist als A: $pB > A$.

Hierbei ist zunächst zu bemerken, dafs die fünfte Eigenschaft nicht aus den übrigen hervorgeht, denn es giebt Gröſsen z. B. die von P. du Bois-Reymond eingeführten „Unendlich der Functionen" (vgl. IX. 24), welche die Forderungen I.)—IV.) erfüllen, V.) aber nicht. Die Postulate I.)—IV.) sind, wie leicht einzusehen, formal von einander unabhängig.[1])

Gröſsen, welche den Eigenschaften I.)—IV.) genügen, sollen absolute heiſsen und zwar, wenn hierzu noch die fünfte tritt, eigentliche oder a. Gr. im engeren Sinne; sonst uneigentliche oder solche im weiteren Sinne.

2. Gestützt auf die Untersuchungen des 1. und 3. Abschnittes können wir noch genauer angeben, welchen Bedingungen die Gröſsen eines Systemes $A, B, C \dots$ zu entsprechen haben, um als absolute Gröſsen im engeren Sinne zu gelten. Nach Aufstellung der in I.) geforderten Definitionen ist nachzuweisen, daſs

1) aus $A = B \quad B = A$;

2) aus $A > B \quad B < A$ folgt und umgekehrt;

3) die aufgestellte Disjunction vollständig ist;

4) aus $A = B$, $B = C$ sich ergiebt $A = C$ [Euclid's 1. allgemeiner Grundsatz (κοινὴ ἔννοια)];

5) aus $A = B$, $B > C$ folgt $A > C$;

6) aus $A > B$, $B > C$ folgt $A > C$.

Nunmehr ist je zwei Gröſsen A, B eine dritte Gröſse des Systemes als ihre Summe zuzuordnen. Dabei müssen erfüllt sein die Sätze:

7) $(A + B) + C = A + (B + C)$;

8) $A + B = B + A$;

9) Wenn $A = A'$, $B = B'$, so ist $A + B = A' + B$ (Euclid's 2. Grundsatz);

10) Wenn $A > A' \quad B = B'$, so ist $A + B > A' + B'$ (Euclid's 4. Grundsatz);

11) $A + B > A$ (Euclid's 8. Grundsatz);

12)—14) Die obigen Forderungen III.)—V.), deren letzte von Archimedes als Annahme (λαμβανόμενον) angeführt[2]) und daher im Folgenden als „Axiom des A." bezeichnet wird.

Aus den Sätzen 1—12 folgen nämlich alle im 2. Abschnitte angeführten Regeln der Addition und Subtraction. Ferner die Sätze:

1) Ist $A = A'$, so sind auch die Gleichvielfachen beider einander gleich: $mA = mA'$.

2) Ist $A > A'$, so ist $mA > mA'$.

3) $mA \pm mB = m(A \pm B)$ (Eucl. V. prop. 1).

Aus 13) folgt, wenn wir die Theilbarkeit einer jeden Gröfse als unbegrenzt voraussetzen:

4) Die gleichvielten Theile von gleichen Gröfsen $A = A'$ sind einander gleich: $\frac{1}{n}A = \frac{1}{n}A'$."

Denn diese Theile können nach dem 2. Satze nicht ungleich sein. Auch kann man in den Sätzen IV. 1, 2 die Einheit durch jede Gröfse A ersetzen. Wegen der Annahme 13) könnte hier die Darstellung derselben etwas vereinfacht werden.

5) „Ist μ eine absolute rationale Zahl, so ist

$$\mu A \pm \mu B = \mu (A \pm B).\text{“}$$

In diesen Formeln ist μA nicht als Product aus der Gröfse A in die Zahl μ aufzufassen (vgl. II. 6).

Aus 14) ergiebt sich: 1) „Ist $A > B$ so ist A entweder ein Vielfaches von B oder A liegt zwischen zwei aufeinander folgenden Vielfachen von B: $qB < A < (q+1)B$." Beweis wie in II. 8.

2) „Ist $A > B$ und C beliebig, so giebt es absolute rationale Zahlen $\frac{p}{q}$ derart dafs $A > \frac{p}{q}C > B$ — und zwar unzählig viele." Denn es giebt ganze Zahlen q, wofür sowol $q(A - B) > C$, als auch $qB > C$ und nach 1) eine ganze Zahl p, so dafs

$$pC > qB \geqq (p-1)C;$$

demnach ist

$$A > B + \frac{1}{q}C \geqq \frac{p}{q}C > B.$$

Zwischen A und $\frac{p}{q}C$, sowie zwischen $\frac{pC}{q}$ und B liegt wieder je eine Gröfse von der verlangten Form u. s. f.

3. Commensurabele und incommensurabele absolute Gröfsen im engeren Sinne. — Ist eine Gröfse A ein Vielfaches einer anderen M, so heifst die letztere ein

Maass der ersteren. Besitzen zwei gleichartige Grössen A, B ein gemeinschaftliches Maass M, so nennt man sie commensurabel. Wenn

$$A = aM, \qquad B = bM,$$

so ist

$$B = \frac{b}{a} A.$$

Ist M' ein anderes gemeinschaftliches Maass von A, B, so dass $A = a'M'$, $B = b'M'$, so ist $\frac{a'}{b'} = \frac{a}{b}$. Denn man hat $bA = aB$, $b'A = a'B$ also $a'bA = ab'A$ und $a'b = ab'$. Der gemeinsame Werth der Zahlen $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$ heisst das Verhältniss von A zu B.

Das grösste gemeinschaftliche Maass zweier Grössen A, B wird auf ähnliche Weise ermittelt, wie der grösste gemeinsame Theiler zweier natürlichen Zahlen (vgl. II. 11).[3]) Wenn $A > B$, so ist entweder $A = qB$ oder $A = qB + B'$, wo $B' < B$. Im zweiten Falle hat man entweder $B = q'B'$ oder $q'B' + B''$, wo $B'' < B'$ und im letzteren wieder entweder $B' = q''B''$ oder $q''B'' + B'''$, wo $B''' < B''$ u. s. f. Auf diese Art gelangt man entweder zu einem Reste $B^{(n)}$, der seinen Vorgänger misst: $B^{(n-1)} = q^{(n)}B^{(n)}$ oder es zeigt sich, dass wie gross auch n sein mag, $B^{(n)}$ niemals ein Maass von $B^{(n-1)}$ ist:

$$A = qB + B',$$

$$B^{(n-1)} = q^{(n)} B^{(n)} + B^{(n+1)} \; (B^{(n+1)} < B^{(n)}) \; (n = 1, 2 \ldots).$$

Im ersten Falle ist $B^{(n)}$ ein gemeinschaftliches Maass von A, B und zwar das grösste, da jedes Maass von A, B auch die Grössen B', $B'' \ldots B^{(n)}$ misst. Im zweiten Falle giebt es kein gemeinschaftliches Maass der Grössen A, B; sie sind incommensurabel. Denn wäre eines (M) vorhanden, so müsste es B', $B'' \ldots B^{(n)}$ messen; es kann aber n so gross angenommen werden, dass $B^{(n)} < M$. Folglich giebt es keines.

Der soeben benutzte Hilfssatz ergiebt sich in folgender Weise. Zunächst bemerke man, dass

$$B^{(n+2)} < \tfrac{1}{2} B^{(n)}.$$

Man schliefst nämlich aus der Gleichung

$$B^{(n)} = q^{(n+1)} B^{(n+1)} + B^{(n+2)},$$

da

$$B^{(n+1)} > B^{(n+2)}$$

und

$$q^{(n+1)} \geqq 1,$$

unmittelbar, dafs

$$B^{(n)} \geqq B^{(n+1)} + B^{(n+2)} > 2 B^{(n+2)}.$$

Demnach folgt nacheinander

$$B'' < \tfrac{1}{2} B, \quad B^{\mathrm{IV}} < \tfrac{1}{2} B' \ldots B^{(2n)} < \tfrac{1}{2} B^{(2n-2)},$$

somit

$$B^{(2n)} < \frac{1}{2^n} B.$$

Nach 14) giebt es Zahlen p, so dafs $M > \frac{1}{p} B$ und nach II. 9 Exponenten m, so dafs $2^m > p$. Mithin ist $M > B^{(2m)}$.

4. Wenn wir das System der alten Geometrie nach den Werken von Euclid, Archimedes, Apollonius genauer prüfen, so werden wir leicht bemerken, dafs es nur in der Verhältnifslehre den in Nr. 2 aufgestellten Forderungen völlig entspricht.[4]) Abgesehen von Bedenken, welche sich auf die exacte Definition der geometrischen Gröfsen an sich beziehen, vermissen wir bald das Verfahren, nach welchem die Vergleichung je zweier unter ihnen durchzuführen ist. Euclid's 7. Grundsatz („Was einander deckt ist gleich") und der 8. („das Ganze ist gröfser als sein Theil") reichen zur geometrischen Erklärung der Gleichheit und des Gröfserseins für die Systeme der geradlinigen Strecken und der Winkel aus. Aber man sucht bei ihm und seinen Nachfolgern vergebens nach Aufschlufs darüber, was unter zwei gleichen Flächen und Körpern, die nicht congruent sind, zu verstehen sei. Handelt es sich um ebene Polygone, so ist es, wie wir sehen werden, sehr leicht, diese Frage zu beantworten. Das angewandte Mittel versagt jedoch immer, wenn geradlinig und krummlinig begrenzte ebene Flächen miteinander verglichen werden sollen. Diese und ähnliche Schwierigkeiten umgeht die Darstellung der Alten auf folgende

Weise. Es wird die Vergleichbarkeit von je zwei gleichartigen geometrischen Gröſsen von vorneherein angenommen d. h. ohne daſs die Möglichkeit der Vergleichung auf geometrischen Wege nachgewiesen ist. Natürlich müssen dann auch die Sätze 1) — 14) in Nr. 2 ohne Beweis zugelassen werden, was, wie a. a. O. hervorgehoben ist, von den Alten zum Theile ausdrücklich anerkannt wurde. Hierzu kommt noch die Annahme, daſs in jedem ihrer Gröſsensysteme neben einer Gröſse A sowol eine kleinere, als auch eine gröſsere vorhanden sei.

Vermittelst der Grundsätze wird die Vergleichung erzielt in einigen Fällen, die nicht zu den im 7. und 8. Grundsatze erwähnten gehören (vgl. Nr. 6). Diese Methode reicht jedoch nicht weit; es muſs daher ein neuer Gedanke herangezogen werden, welcher allerdings von den Alten nicht ausdrücklich ausgesprochen wurde.

Die Griechen geben zu den von ihnen gefundenen Sätzen über die Quadratur krummlinig begrenzter Flächen stets indirecte Beweise, denen der folgende Satz zu Grunde liegt: „Zwei gleichartige geometrische Gröſsen A, B sind einander gleich, wenn sich zeigen läſst, daſs bei der Annahme $A > B$ der Unterschied $A - B$ und bei der Annahme $A < B$ der Unterschied $B - A$ kleiner sein würde, als eine jede mit A, B gleichartige Gröſse. — Es ist $A \leqq B$, wenn nur das Erstere, und $A \geqq B$, wenn nur das Letztere behauptet werden kann.“ — Die Benutzung dieses Satzes, auf welchen die Exhaustionsmethode der Alten sich zurückführen läſst, wird ermöglicht durch das Axiom des Archimedes (V).

5. Zufolge der geometrischen Voraussetzungen der Euclid'schen Geometrie lassen sich für die nachstehenden Systeme von absoluten Gröſsen im engeren Sinne die in Nr. 2 aufgestellten Forderungen reduciren.

I. Hinsichtlich der geradlinigen Strecken läſst sich die Vergleichung, Addition, Subtraction, Theilung geometrisch ausführen, so daſs nur der Satz V. unbewiesen bleibt. Unter den Strecken giebt es incommensurabele Paare z. B. die Seite

B und die Diagonale A eines Quadrates. Hier findet man nämlich

$$A = B + B', \quad B^{(n-1)} = 2B^{(n)} + B^{(n+1)} \quad (n = 1, 2 \ldots).$$

II. Aehnliches gilt von den Winkeln, nur ist die Theilung im Allgemeinen geometrisch (d. h. mit Lineal und Zirkel) nicht ausführbar, daher als möglich vorauszusetzen (13. S.).[5]

III. Eingehender wollen wir uns mit dem Systeme der Polygone d. h. solcher ebenen Flächen, deren Begrenzung aus geradlinigen einander nicht schneidenden Strecken besteht, beschäftigen, da eine einfache Darstellung dieses Gegenstandes nicht hinlänglich bekannt zu sein scheint.[6])

Definition. „Zwei Polygone sind einander gleich, wenn sie entweder congruent oder aus gleich vielen Stücken bestehen, die paarweise congruent sind. — Ein Polygon ist gröſser als ein zweites, wenn es neben den Stücken des letzteren noch andere enthält."

Daſs die formalen Bedingungen von I. 2, 3 erfüllt sind, leuchtet ein. Bedeuten A, B, $C\ldots$ nun Polygone, so hat man neben $A = B$, $B = C$ auch $A = C$. Davon überzeugt man sich, wenn man in B sowol das Liniensystem verzeichnet, welches die Theile von A, als auch das, welches die Theile von C liefert u. s. f. Für die weitere Untersuchung ist bequem das Corollar: „Zwei Polygone sind einander gleich, wenn sie aus gleich vielen Stücken bestehen, die paarweise einander gleich sind."

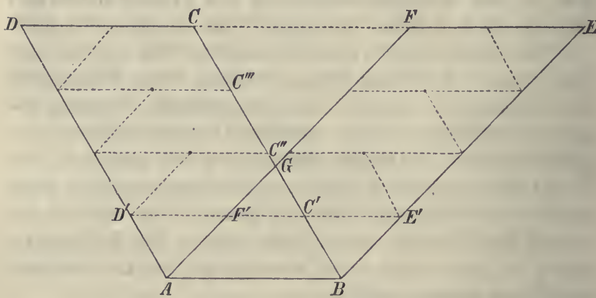
Nunmehr ist leicht zu zeigen, daſs je zwei Polygone mit einander verglichen werden können.

Gleichwinkelige Parallelogramme, worin je eine Seite gleich einer gegebenen Strecke, werden durch Aufeinanderlegen verglichen.

1. **Satz.** „Parallelogramme von gleichen Grundlinien und Höhen sind einander gleich" (Euclid. I. prop. 35).

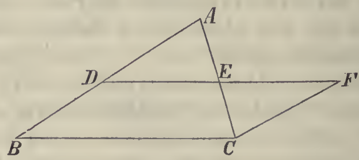
Beim Beweise des Satzes sind drei Fälle zu unterscheiden, wovon wol nur der dritte einer besonderen Erwähnung bedarf: Die Seiten BC, AF der gegebenen Parallelogramme $ABCD$ und $ABEF$ schneiden sich in G. Zufolge des für die Strecken geltenden Satzes V. in Nr. 1 kann man BC

in p gleiche Theile theilen, deren jeder kleiner ist als BG. Zieht man durch die Theilungspunkte C', C'' ... Parallele zur gemeinsamen Grundlinie AB, so zerfällt jedes der Parallelogramme in p unter sich congruente Parallelogramme und zwar ist je ein Theil des einen gleich einem des anderen:



deren: $ABC'D' = ABE'F'$ — nach dem zweiten Falle unseres Satzes. Folglich ist $ABCD = ABEF$. Die punktirten Linien zerschneiden die gegebenen Figuren so, daſs je ein Stück der einen congruent ist einem der anderen.

2. Satz. „Ein Dreieck ist gleich einem Parallelogramme von derselben Grundlinie und der halben Höhe.“

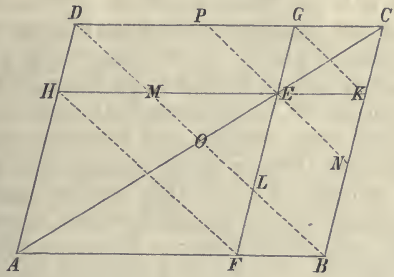


Verbindet man die Mittelpunkte D, E der Seiten AB, AC des Dreieckes ABC und macht $EF = DE$, so ist $AED \cong CEF$ also $ABC = BCFD$.

3. Satz. „In jedem Parallelogramme sind die Ergänzungen der um eine Diagonale liegenden Parallelogramme einander gleich“ (Euclid I. prop. 43).

D. h. Zieht man durch einen Punkt E einer der Diagonalen des Parallelogrammes $ABCD$ Parallele FG, HK

zu den Seiten desselben, so entstehen zwei gleiche Parallelogramme $FBKE = HEGD$. — Der Beweis des Satzes beruht auf der Bemerkung, dafs die Diagonalen BD, FH, KG



parallel sind, was sich leicht ergiebt, wenn man durch O eine Parallele zu BC zieht.[7]) Legt man durch E $NP \parallel BD$, so erhält man die congruenten Dreiecke

$$FBL \cong HMD, \qquad ENK \cong PEG$$

und die gleichen Parallelogramme

$$BNEL = DMEP.$$

Demnach ist

$$FBKE = HEGD.$$

Mit Hilfe der vorstehenden Sätze kann man zu jedem Parallelogramme, sowie zu jedem Dreiecke ein ihm gleiches Parallelogramm construiren, von dem ein Winkel und eine Seite gegeben sind. Dasselbe gilt von jedem Polygone, da man es durch Diagonalen in Dreiecke zerlegen kann. Somit lassen sich in der That je zwei Polygone mit einander vergleichen.

Nennt man Summe zweier Polygone A, B jedes aus ihnen zusammengesetzte Polygon, so ergeben sich sofort die Sätze 7)—11) in Nr. 2. Die noch übrigen 12)—14) lassen sich dadurch nachweisen, dafs man die betreffenden Polygone wieder in Parallelogramme verwandelt, wovon ein Winkel und eine Seite gegeben sind.

IV. In ähnlicher Weise lassen sich die Prismen als absolute Gröfsen im engeren Sinne auffassen.

6. Ohne Zweifel wird man zugeben, dafs vorstehendes Verfahren, die Polygone zu vergleichen, die Darstellung Euclid's an geometrischer Anschaulichkeit weit übertrifft. Dort wird z. B. die Gleichheit der im 1. Satze erwähnten Parallelogramme lediglich dialektisch mit Hilfe der als Axiome erklärten Sätze 9) und 12) in Nr. 2 begründet. Leider läfst uns die oben befolgte Methode bald im Stiche, in der Stereometrie schon bei der Vergleichung der Pyramiden. Bis jetzt ist es nämlich nicht gelungen, zwei Pyramiden von gleichen Grundflächen und Höhen in gleichviele, paarweise congruente Theile zu zerlegen. Bei den Alten wird in solchen Fällen der am Schlusse von Nr. 4 angeführte Satz angewendet.[8])

Es dürfte nicht überflüssig sein, die Methode der Alten durch ein Beispiel zu erläutern, wozu der soeben angezogene Satz: „Zwei dreiseitige Pyramiden A, A' von gleichen Grundflächen G, G' und gleichen Höhen h, h' sind einander gleich" dienen kann. Theilt man h in n gleiche Theile und legt durch die Theilungspunkte und die Spitze von A Ebenen parallel zu G und macht dasselbe an der Pyramide A', so sind die gleichweit von den Grundflächen abstehenden Schnitte von A, A' einander gleich. Dabei zerfallen A, A' je in n Theile, die von den Spitzen ab gerechnet mit $S_1\ S_2 \dots S_n$, bez. $S'_1\ S'_2 \dots S'_n$ bezeichnet werden. Zieht man sowol in A, als auch in A' von zwei Ecken der Grundfläche und von den zwei entsprechenden jedes Schnittes Parallele zu der durch die dritte gehenden Scheitelkante, so werden S_r, S'_r zu Prismen R_r, R'_r ergänzt, welche einander gleich sind. Zugleich sieht man, dafs $S_1 < R_1$ und $R_{r-1} < S_r < R_r$ $(r = 2, 3 \dots n)$. — Angenommen nun es sei $A' > A$, so ist $A' - A < R_n$, da

$$A' < R'_1 + R'_2 + \dots + R'_n = R_1 + R_2 + \dots + R_n$$

und

$$A > R_1 + R_2 + \dots + R_{n-1}.$$

Somit ist auch $A' - A < \frac{1}{n} P$, wenn P das Prisma bedeutet, das entsteht, wenn die von den zwei Ecken der Grundfläche ausgehenden Geraden bis an die durch die Spitze von A gelegte Ebene verlängert werden. Nach dem Axiome des Archimedes giebt es aber, wie klein auch der Körper E sein mag, eine ganze Zahl n so, dafs $nE > P$; somit ist $A' - A < E$. Ganz ähnlich folgt, $A' < A$ vorausgesetzt, $A - A' < E$. Also mufs $A' = A$ sein.

Die in dem Fundamentalsatze der Exhaustionsmethode liegende Voraussetzung, dafs je zwei geometrische Gröfsen derselben Art vergleichbar seien, ist theoretisch jedenfalls unzulässig; denn die analytische Geometrie vermag Curven nachzuweisen, welche keine endliche Länge haben.[9]) Hier giebt es keinen anderen Ausweg, als die Längen der Curven, die Flächenräume und körperlichen Inhalte als Grenzwerthe zu definiren.

7. Relative Gröſsen. Hat man zwei solche Systeme absoluter Gröſsen definirt, daſs jeder Gröſse (und den ihr gleichen) des einen Systemes eine Gröſse (und die ihr gleichen) des anderen entspricht und umgekehrt — und erklärt man, daſs jedes dieser Paare die Summe „Null" liefert; so kann man die beiden Systeme mit der Null zu einem System von Gröſsen vereinigen, die dann relative heiſsen. So haben wir in IV. 4 das System der rationalen Zahlen gebildet. Für jedes System von relativen Gröſsen kann man in ähnlicher Weise, wie für die genannten Zahlen, eine Addition definiren.

Nach der Natur der zu Grunde gelegten absoluten Gröſsen haben wir auch die relativen Gröſsen in eigentliche und uneigentliche einzutheilen. Ein Beispiel der letzteren Art s. IX. 25.

Relative Gröſsen im engeren Sinne kommen in der neueren Geometrie vor. — Setzen wir in einer Geraden g (und in allen zu ihr parallelen) eine positive Richtung fest und nennen diejenigen Strecken AB derselben, wofür der Übergang von A zu B im positiven Sinne erfolgt, positiv, die anderen negativ; so erhalten wir das System der relativen Strecken. Es ist am bequemsten hierfür die Möbiussche Bezeichnung AB zu gebrauchen, wobei auf die Anordnung der Buchstaben zu achten ist. Gleich sind nun zwei Strecken $AB = A'B'$, wenn die absoluten Strecken $|AB|$, $|A'B'|$ einander gleich sind und der Übergang von A zu B in demselben Sinne stattfindet wie der von A' zu B'. Erfolgt er bei der zweiten im entgegengesetzten Sinne wie bei der ersten, so heiſsen die Strecken AB, $A'B'$ einander entgegengesetzt z. B. AB und BA. Die Strecke AB heiſst gröſser als AC, wenn CB eine positive Strecke ist.

Als Summe zweier Strecken $AB + CD$ wird definirt die Strecke AE, worin der Punkt E durch die Construction der Strecke $BE = CD$ gefunden wird. Ferner sei $AB + BA = 0$, $0 + AB = AB + 0 = AB$. Nun folgt sofort 1) $AB + CD = CD + AB$ und 2) $AB + CD = AB + C'D'$ wenn $CD = C'D'$. Um 3) die associative Eigenschaft der Verknüpfung festzustellen, genügt die Bemerkung, dafs $(AB + BC) + CD = AC + CD = AD$ und $AB + (BC + CD) = AB + BD = AD$. 4) Ist $BC > BC'$, so ist $AB + BC > AB + BC'$. Denn es zeigt die Figur, dafs $AC > AC'$. Der Gleichung $AC + CX = AB$ genügt die Strecke $CX = CB$ und nur sie, bez. die ihr gleichen. Die Subtraction ist somit stets ausführbar und eindeutig: $AB - AC = CB$. Da $BA = 0 - AB$, so schreibt man $BA = - AB$.

In ähnlicher Weise kann man relative Winkel, Flächen, Körper definiren.

8. Stetige Systeme von absoluten Gröfsen. Der Raum und die in ihm gedachten Gebilde werden als stetig ausgedehnt bezeichnet. Sieht man Körper, Fläche, Linie als geometrische Grundbegriffe an, so mufs auch die stetige Ausdehnung ein solcher sein; denn es läfst sich ja von keinem derselben die Stetigkeit trennen. Bolzano betrachtet die Entfernung von je zwei Punkten als den Grundbegriff der Geometrie und versucht damit die Punktcontinua, zunächst die linearen oder Linien, zu erklären, was ihm jedoch nicht gelungen ist, indem seine Continua sogar des Zusammenhanges entbehren können.[10])

Bei der Definition eines stetigen Gröfsensystemes wird es sich darum handeln, aus dem Begriffe der absoluten Gröfsen im Allgemeinen einen engeren abzuleiten durch Zufügung von solchen Merkmalen, welche auch jeder begrenzten Linie zukommen. Die folgenden Erörterungen sind gegründet auf die Bemerkung, dafs die Stetigkeit einer Linie z. B. der Geraden AB nicht allein dadurch, dafs man ein zusammenhängendes Stück $A'B'$ aus ihr entfernt, sondern auch schon durch Wegnahme eines Punktes M aufgehoben wird. Man hat nur die Eigenschaften der beiden Theile, in welche durch jeden dieser Vorgänge das System der die ganze Linie bildenden Strecken AM zerfällt, zu untersuchen.

Wir setzen zunächst ein System Σ von Gröfsen $A, B, C \ldots.$ mit den folgenden Eigenschaften voraus. Neben den Forderungen I—III in Nr. 1 soll noch die nachstehende erfüllt sein.

IV.) Zwischen je zwei ungleichen Gröfsen liegt immer noch eine Gröfse des Systemes und es giebt neben jeder Gröfse sowol eine kleinere, als auch eine gröfsere; somit weder eine kleinste, noch eine gröfste. Die letzte Eigenschaft wird kurz dadurch ausgedrückt, daſs man dem Systeme Σ die untere Grenze Null (0) und die obere Unendlich (∞) verleiht.

Aus dem Systeme Σ denken wir uns ein System Π zwischen den Grenzen 0 und A abgesondert, das, ohne gerade alle Gröſsen von Σ zu umfassen, doch noch die obigen Eigenschaften besitzt. Das System Π wird im Allgemeinen Lücken aufweisen, wie man auf folgende Weise erkennen kann.

Eine Lücke des Systemes Π heiſst jede Theilung der ihm angehörigen Gröſsen P in zwei Gruppen von den folgenden Eigenschaften:

1) Jede Gröſse P gehört einer und nur einer Gruppe an.

2) Wenn P_1 eine Gröſse der ersten Gruppe ist, so auch jede Gröſse $P < P_1$; wenn P_2 eine Gröſse der zweiten Gruppe ist, so auch jede Gröſse $P > P_2$. (Somit ist notwendig $P_1 < P_2$.)

3) Wenn P_1 eine Gröſse der ersten Gruppe, so gehört zu ihr auch eine Gröſse, welche P_1 überschreitet, und ist P_2 aus der zweiten Gruppe, so befindet sich darin auch eine Gröſse $P < P_2$.

Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden. Entweder bleibt der Unterschied $P_2 - P_1$, was auch P_1 für eine Gröſse der ersten, P_2 der zweiten Gruppe sein möge, über einer bestimmten Gröſse D von Π, oder er kann kleiner sein als irgend eine Gröſse von Π. Lücken der letzteren Art sollen Schnitte von Π heiſsen.

Ein System Π, das keine Lücken erster Art, also entweder gar keine Lücken oder doch nur Schnitte aufzuweisen hat, soll zusammenhängend heiſsen. — Dazu ist hinreichend, daſs die Gröſsen von Π (jedoch nicht notwendig die von Σ) dem Axiome des Archimedes (V) genügen. Angenommen es seien die zu einer Lücke von Π gehörigen Gruppen so beschaffen, daſs $P_2 - P_1 > D$. Denken wir uns jetzt unter P_1 eine bestimmte Gröſse der ersten, unter P_2 eine solche der zweiten Gruppe, so gehören zur ersten Gruppe die Gröſse $P_1 + D$ und alle zwischen ihr und P_1 liegenden, desgleichen $P_1 + 2D$ und alle zwischen ihr und $P_1 + D$ liegenden; kurz $P_1 + nD$, wo n eine beliebige natürliche Zahl sein kann, und alle zwischen ihr und P_1 liegenden. Es giebt aber nach Voraussetzung eine solche Zahl m, wofür $mD > P_2 - P_1$ d. i. $P_2 < P_1 + mD$. Demnach wäre P_2 zur ersten Gruppe zu rechnen, entgegen der Voraussetzung. — Es scheint nur auf die angegebene Weise möglich zu sein, ein zusammenhängendes System als solches zu erkennen.

Zur Stetigkeit des Systemes Σ ist erforderlich die Abwesenheit von Lücken. Allein das reicht nicht hin, da es denkbar ist, daſs Schnitte eines aus Σ entnommenen zusammenhängenden Systemes Π durch mehr als eine Gröſse von Σ geschlossen werden d. h. daſs es mehrere Gröſsen in Σ gebe, welche gröſser als alle P_1, kleiner als alle P_2 sind (vgl. IX. 24). Die Stetigkeit des Systemes Σ wird demnach folgendermaſsen zu erklären sein.

„Das Gröſsensystem Σ heiſst zwischen den Grenzen 0, A stetig dann und nur dann, wenn aus den ihm angehörigen Gröſsen Systeme Π, welche innerhalb der Grenzen 0, A zusammenhängen, gebildet werden können und wenn jedem Schnitte eines solchen eine und nur eine, nicht zu Π gehörige Gröſse S entspricht, welche gröſser als alle P_1, kleiner als alle P_2 ist.“ [11])

Ein System von relativen Gröſsen wird als stetig angesehen, wenn jedes der beiden zusammengefaſsten Systeme von absoluten Gröſsen stetig ist. Die vorstehenden Definitionen behalten auch für ein solches Geltung.

9. Wir haben noch die wichtige Bemerkung hervorzuheben, daſs jedes stetige System von absoluten Gröſsen zu den Gröſsen dieser Art im engeren Sinne gehört. Das zeigt der folgende Satz.

„Wenn ein Gröſsensystem Σ den Forderungen I—IV. in Nr. 8 genügt und dabei stetig ist, so folgt 1) die Theilbarkeit jeder Gröſse A desselben in beliebig viele gleiche Theile, 2) das Axiom (V. in Nr. 1) des Archimedes.“

Beweis. Zu 1). Man bemerke zunächst: Ist B eine gegebene Gröſse von Σ, n eine beliebige natürliche Zahl, so existirt immer eine Gröſse Y, derart daſs $nY < B$. Das ergiebt sich aus den Voraussetzungen I—IV. unmittelbar. Würde man nun annehmen, es sei keine Gröſse X vorhanden, derart daſs $nX = A$, so könnte man im Systeme (0, A) eine

Lücke nachweisen, gegen die Voraussetzung der Stetigkeit. In der That, ist $P < A$, so ist nP entweder $<$ oder $> A$. Auf diese Weise lassen sich die Gröfsen $(0, A)$ in zwei Gruppen P_1, P_2 theilen: $nP_1 < A$, $nP_2 > A$, welche die oben aufgestellten Bedingungen erfüllen. Insbesondere: ist P_1 aus der ersten Gruppe, so auch $P_1 + Y_1$, woferne nur Y_1 so gewählt ist, dafs $nY_1 < A - nP_1$; ist P_2 aus der zweiten Gruppe, so auch $P_2 - Y_2$, woferne nur $nY_2 < nP_2 - A$.

Zu 2). Es sei $A > B$. Würde die Reihe wachsender Gröfsen B, $2B \ldots\ldots nB \ldots$ die Gröfse A nicht überschreiten, so müfste es eine Gröfse $C \leq A$ geben, so dafs $C > nB$ $(n = 1, 2 \ldots)$, jedoch Zahlen m, so dafs $C - B < mB$. Darin liegt ein Widerspruch, da $C < (m+1)B$ folgen würde.

Es ist nur nachzusehen, ob der hier benutzte Satz: „Wenn $M_1\ M_2 \ldots M_n \ldots$ eine unbegrenzte Reihe wachsender Gröfsen des stetigen Systemes $\Sigma : (0, A)$ bezeichnet, welche die Gröfse A nicht überschreiten, so existirt eine und nur eine Gröfse $C \leq A$ derart, dafs C gröfser ist als alle M_n, jedoch zu jeder Gröfse $D < C$ des Systemes Σ eine ganze Zahl m gehört, sodafs wenn $n > m$ $M_n > C - D$" — nicht das Axiom des Archimedes voraussetzt. Das ist jedoch nicht der Fall. In der That, wird die Existenz einer solchen Gröfse C nicht zugestanden, so ist im Systeme $(0, A)$ eine Lücke vorhanden. Die erste Gruppe wird gebildet von den Gröfsen P_1, die kleiner sind als irgend ein M_n; die zweite von denjenigen P_2, die gröfser sind als jedes M_n. Die Gruppen entsprechen den Bedingungen der vorigen Nr. So findet man z. B. in der zweiten Gruppe zu jeder Gröfse P_2 eine kleinere. Wäre nämlich bei beliebigem D für jeden hinlänglich grofsen Werth von n $(n > m)$ $M_n > P_2 - D$, so könnte man P_2 für C setzen. Somit mufs es Gröfsen D geben, so beschaffen, dafs wie grofs auch n vorausgesetzt werden mag, eine Zahl $r > n$ vorhanden ist, wofür $M_r \leq P_2 - D$. Bezeichnet nun P eine beliebige Gröfse zwischen $P_2 - D$ und P_2, so hat man $P > M_r > M_n$, worin n jeder Index sein kann. — Und zwar existirt nur eine Gröfse C. Hätte nämlich $C' > C$ dieselbe Eigenschaft wie C, so wäre, wie klein auch D sein mag, $C + D > M_m + D > C'$; also mufs $C' < C$ sein (vgl. Nr. 4). Ebensowenig kann aber $C' < C$ sein, somit bleibt nur $C' = C$ übrig.

10. Das System der rationalen Zahlen z. B. von 0 bis zu einer Zahl $\alpha > 0$ ist offenbar zusammenhängend, läfst aber Schnitte zu. — Es sei $0 < \varrho < \alpha$ und ϱ nicht die $n$te Potenz einer rationalen Zahl. Da mithin die $n$te Potenz jeder der gegebenen Zahlen entweder kleiner oder gröfser als ϱ ist, zerfallen sie in zwei Gruppen π_1, π_2. In der ersten sei $\pi_1^n < \varrho$, in der zweiten $\pi_2^n > \varrho$. Die Gruppen haben auch die 2) und, wie aus dem Folgenden erhellt, die 3) der obigen Eigenschaften. Man hat nur positive Zahlen ξ_1, ξ_2 anzugeben, so daſs, wenn π_1 eine bestimmte Zahl der ersten, π_2 eine der zweiten Gruppe bedeutet, $(\pi_1 + \xi_1)^n < \varrho$ und $(\pi_2 - \xi_2)^n > \varrho$. Da nach VIII. 2, wenn nur $(n-1)\xi_1 < \pi_1$,

$$\left(1 + \frac{\xi_1}{\pi_1}\right)^n < 1 : \left(1 - \frac{n\xi_1}{\pi_1 + \xi_1}\right);$$

so genügt, daſs

$$\xi_1 \leqq \frac{\pi_1(\varrho - \pi_1{}^n)}{(n-1)\varrho + \pi_1{}^n}$$

sei. Und da

$$\left(1 - \frac{\xi_2}{\pi_2}\right)^n > 1 - \frac{n\xi_2}{\pi_2},$$

so braucht man nur anzunehmen

$$\xi_2 \leqq \frac{(\pi_2{}^n - \varrho)}{n\pi_2{}^{n-1}}.$$

Das System der rationalen Zahlen ist demnach nicht stetig. Um dasselbe zu einem stetigen Gröſsensysteme zu ergänzen, kann man jedem seiner Schnitte entsprechend, eine neue Zahl einführen. So gelangt man nach Dedekind zu den irrationalen Zahlen.

VI. Abschnitt.

Theorie der Verhältnisse nach Euclid.

1. Man sagt von je zweien eines Systemes von absoluten Gröfsen im engeren Sinne, dafs die eine ein Verhältnifs zur anderen habe. Mithin wird je zweien solcher Gröfsen, die in eine bestimmte Reihenfolge $A\ B$ gebracht sind, ein neues Object zugeordnet, welches das Verhältnifs A zu B heifst und die Bezeichnung $A : B$ erhält.[1] A heifst das Vorderglied, B das Hinterglied. Unser Ding ist noch ohne Eigenschaften, kann also solche erhalten — und zwar in verschiedener Weise — nach dem schon im 3. Abschnitte angewandten Verfahren, indem wir es zuerst zu einer Gröfse machen und dann Verknüpfungen zwischen den neuen Gröfsen definiren. Im Folgenden sollen $A, B, C \ldots$ gleichartige absolute Gröfsen im engeren Sinne, $a, b, c \ldots$ natürliche, $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ absolute rationale Zahlen, $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \ldots$ Verhältnisse bedeuten.

Wir können zunächst festsetzen, es soll $A : B$ gleich, gröfser, kleiner als $A' : B'$ sein, je nachdem $A + B'$ gleich, gröfser, kleiner als $B + A'$. Die formalen Bedingungen nach I. 2, 3 sind offenbar erfüllt, somit die Definitionen zulässig. Ferner wollen wir das Verhältnifs $(A + A') : (B + B')$ als Summe von $A : B$ und $A' : B'$ bezeichnen, wobei, wie man leicht finden wird, dieselben Sätze gelten, wie bei der Addition der relativen Gröfsen (V. 7). Die Subtraction ist auch hier stets möglich und zwar nur auf eine Weise. — Die dergestalt bestimmten Verhältnisse hat man arithmetische genannt. Das arithmetische Verhältnifs stellt eine Erweiterung der Differenz $A - B$ auf den Fall wo $A \overline{\gtrless} B$, dar und ist daher entbehrlich, wenn eine solche bereits dadurch erzielt ist, daſs aus den absoluten Gröſsen $A, B, C \ldots.$ relative abgeleitet wurden.

Wir wenden uns nun zur Aufstellung der geometrischen Verhältnisse, welche in der Geometrie der Alten als Ersatz für die irrationalen Zahlen unentbehrlich waren. Und zwar wollen wir ihre Theorie zunächst in der Gestalt vorführen, wie sie im 5. Buche der Euclidschen Elemente vorliegt. — In Zukunft ist unter „Verhältniſs" immer das „geometrische" zu verstehen.

2. In V. 3 ist bemerkt, daſs man unter dem Verhältnisse zweier commensurabelen Gröſsen $A = aM$, $B = bM$ den Quotienten $\frac{a}{b}$ verstehe. Daraus folgt, daſs wenn $A = \alpha M$, $B = \beta M$, das Verhältniſs $A : B$ die Zahl $\frac{\alpha}{\beta}$ sei. Es kann dabei M auch die Einheit, A B absolute rationale Zahlen bedeuten. Stellen wir neben A B ein zweites Paar commensurabeler, aber nicht notwendig mit ihnen gleichartiger Gröſsen $A'B'$ — $A' = a'M'$, $B' = b'M'$ —; so nennt man $A : B$ gleich gröſser, kleiner als $A' : B'$, je nachdem die Zahl $\frac{a}{b}$ gleich, gröſser, kleiner als $\frac{a'}{b'}$. Ist $A = B$, $A' = B'$, so ist demnach $A : B = A' : B'$. Je zwei gleiche Gröſsen stehen zu einander im „Verhältnisse der Gleichheit".

Um die Definition der gleichen Verhältnisse auf Paare incommensurabeler Gröſsen zu erweitern, suchen wir zunächst eine solche Eigenschaft von zwei commensurabelen Gröſsenpaaren AB, $A'B'$, deren Verhältnisse einander gleich sind, auf, welche auch dann einen Sinn hat, wenn die Paare incommensurabel sind. Es sei also $A = aM$, $B = bM$; $A' = a'M'$, $B' = b'M'$ und $ab' = a'b$. Bezeichnen m, n irgend zwei natürliche Zahlen, so wird ma entweder gleich oder gröſser oder kleiner als nb sein. Multiplicirt man beide Seiten jeder dieser Relationen mit b' und dividirt dann durch b, so findet man entsprechend ma' gleich, gröſser, kleiner als nb'. Mithin ist wegen $bA = aB$, $b'A' = a'B'$ neben

$$mA \gtreqless nB \qquad \text{simultan} \qquad mA' \gtreqless nB'.$$

Dieser Satz gestattet die folgende Umkehrung, welche für unseren Zweck unerläfslich ist.

Satz. „Angenommen dafs für alle Paare pq von relativen Primzahlen mit Ausnahme eines einzigen gh den Relationen $pA \gtrless qB$ entsprechen die folgenden: $pA' \gtrless qB'$, während für das letztere Paar die Gleichung $gA = hB$ besteht, so mufs auch $gA' = hB'$ sein."

Beweis. Bedeutet m eine beliebige durch g nicht theilbare Zahl, nur so gewählt dafs $mA > B$, so kann mA kein Vielfaches von B sein, so dafs nach V. 2 eine ganze Zahl n existirt, wofür $nB < mA < (n+1)B$. Daraus folgt durch Multiplication mit g $ng < mh < (n+1)g$ und ferner zufolge Voraussetzung $nB' < mA' < (n+1)B'$. Nun kann man nach V. 4 zeigen, dafs $gA' = hB'$. Wäre nämlich $A' > \frac{h}{g}B'$, so hätte man

$$A' - \frac{h}{g}B' < \frac{n+1}{m}B' - \frac{n}{m}B' = \frac{B'}{m},$$

was unmöglich, da m so grofs angenommen werden kann, dafs $\frac{1}{m}B'$ kleiner ist als eine beliebige mit $A'B'$ gleichartige Gröfse D'. Somit mufs $A' \leqq \frac{h}{g}B'$ sein. Es kann aber auch A' nicht $< \frac{h}{g}B'$ sein, da auch $\frac{h}{g}B' - A' < \frac{B'}{m}$ sein müfste. Folglich bleibt nur übrig, dafs $gA' = hB'$.

Nunmehr können wir die folgende Definition aufstellen:

Def. 1. Bezeichnen m, n irgend ein Paar natürlicher Zahlen, so dafs $mA \gtrless nB$ und ist simultan mit diesen Relationen $mA' \gtrless nB'$, so sollen die Verhältnisse $A:B$ und $A':B'$ einander gleich sein. (Eucl. V. Def. 5.)[2])

Die formalen Bedingungen von I. 2 sind hier erfüllt. Ist $A:B = A':B'$, so ist auch $A':B' = A:B$. Denn hat man $m'A' \gtrless n'B'$, so kann nach dem obigen Satze nicht $m'A = n'B$, mithin mufs zufolge der Voraussetzung entsprechend $m'A \gtrless n'B$ sein. Unmittelbar ergiebt sich: 1) Ist $A:B = A':B'$ und $A':B' = A'':B''$, so ist $A:B = A'':B''$ (Eucl. V. prop. 11). 2) Ist $A = A'$, $B = B'$, so ist $A:B = A':B'$ (l. c. prop. 7).

3. Das gröfsere Verhältnifs. Wenn die Gröfsenpaare $A\,B$, $A'\,B'$ commensurabel sind, so hat man, wie oben bemerkt, $A:B > A':B'$ falls $ab' > a'b$. Lassen wir wieder m, n beliebige Zahlen sein, so ergiebt sich leicht: 1) Ist

$$\frac{a}{b} > \frac{n}{m} > \frac{a'}{b'},$$

so hat man neben $mA > nB$, $mA' < nB'$; 2) ist $\frac{n}{m} = \frac{a}{b}$, so neben $mA = nB$ $mA' < nB'$ und wenn $\frac{n}{m} = \frac{a'}{b'}$, so neben $mA > nB$ $mA' = nB'$; 3) ist $\frac{n}{m} > \frac{a}{b}$, so hat man neben $mA < nB$ $mA' < nB'$ und wenn $\frac{n}{m} < \frac{a'}{b'}$, so neben $mA > nB$ auch $mA' > nB'$.

Wie diese Relationen zusammenhängen, lehren die folgenden Sätze: 1) „Giebt es ein Zahlenpaar m, n, so dafs neben

$$mA > nB \quad mA' \leqq nB',$$

so ist stets neben

$$pA \leqq qB \quad pA' < qB'.\text{“}$$

Denn aus $pA \leqq qB$ folgt

$$pnA \leqq qnB < qmA,$$

also $pn < qm$ und somit

$$pnA' < qmA' \leqq qnB'$$

also $pA' < qB'$. — 2) „Ist neben

$$kA > lB \quad kA' = lB',$$

so giebt es auch Zahlenpaare m, n, so dafs neben

$$mA > nB \quad mA' < nB'.\text{“}$$

Denn zwischen A und $\frac{l}{k}B$ liegen unzählige Gröfsen $\frac{n}{m}B$ (V. 2), also hat man $mA > nB$ und $\frac{n}{m}B' > \frac{l}{k}B' = A'$ d. i. $mA' < nB'$.

Das Vorstehende hat geführt zu

Def. 2 (Eucl. V. Def. 7). „Es steht A im gröfseren (kleineren) Verhältnisse zu B, als A' zu B', wenn ein Zahlenpaar m, n existirt, so dafs zugleich

$$mA > nB \quad mA' \leqq nB' \qquad (mA < nB \quad mA' \geqq nB').$$

Die formalen Forderungen von I. 3 sind erfüllt. 1) Aus $A:B > A':B'$ folgt $A':B' < A:B$. (Im Falle daſs neben $mA > nB$ $mA' = nB'$ gegeben ist, braucht man nur den 2. Satz oben anzuwenden.) 2) Die aufgestellte Disjunction unter den Verhältnissen ist vollständig. — Betrachtet man nämlich zunächst solche Zahlenpaare mn, daſs $mA > nB$, so hat man entweder einmal $mA' \leqq nB'$ — d. i. $A:B > A':B'$ — oder es ist stets $mA' > nB'$. Geht man nun über zu solchen Paaren, welche $mA < nB$ liefern, so ist entweder einmal $mA \geqq nB'$ — d. i. $A:B < A':B'$ oder durchaus auch $mA' < nB'$, in welchem Falle man $A:B = A':B'$ setzt. 3) Aus $A:B = A':B'$ und $A':B' > A'':B''$ folgt $A:B > A'':B''$ (Eucl. V. prop. 13). 4) Aus $A:B > A':B'$ und $A':B' > A'':B''$ folgt $A:B > A'':B''$. Denn nach Voraussetzung giebt es Zahlen m, n, so daſs $mA > nB$, $mA' \leqq nB'$; also ist nach dem 1. Satze oben $mA'' < nB''$. Man findet somit $A:B > A'':B''$.

4. Erste Gruppe von Sätzen über Proportionen und Ungleichungen. Gleichungen zwischen Verhältnissen heiſsen Proportionen. Sind A und B ungleiche Gröſsen, so sind die Verhältnisse $A:B$ und $B:A$ von einander verschieden und zwar ist neben $A > B$ $A:B > B:A$. Das Verhältniſs $B:A$ heiſst das umgekehrte von $A:B$. Unmittelbar aus den vorhergehenden Definitionen folgen die Sätze:

1) „Ist $A:B \gtreqless A':B'$, so hat man entsprechend $B:A \lesseqgtr B':A'$."

Bezeichnen α β absolute rationale Zahlen, so hat man: 2) „$A:B = \alpha A:\alpha B$ (V. 15); 3) neben $A:B \gtreqless A':B'$ entsprechend $\alpha A:\beta B \gtreqless \alpha A':\beta B'$." (V. 4.)[3])

4) „Ist $A > A'$, so ist $A:B > A':B$" (V. 8). Nach V. 2 giebt es Gröſsen $\frac{n}{m}B$, sodaſs $A > \frac{nB}{m} > A'$; also hat man neben $mA > nB$ $mA' < nB$ d. i. $A:B > A':B$. Daraus folgt nach I. 7:

5) „Ist $A:B \gtreqless A':B$, so ist entsprechend $A \gtreqless A'$." (V. 9 und 10.)

6) „Aus $A:B = A':B'$ folgt

$(A \pm B):A = (A' \pm B'):A'$ und $(A \pm B):B = (A' \pm B'):B'$, wobei im Falle des unteren Zeichens $A > B$ vorauszusetzen ist" (V. 18 und 17). Wenn $p \geqq q$, so ist sowol $p(A+B) > qA$, als auch $p(A'+B') > qA'$. Ist aber $p < q$, so hat man neben $p(A+B) \gtrless qA$ entsprechend $pB \gtrless (q-p)A$, somit hier entsprechend $pB' \gtrless (q-p)A'$, also $p(A'+B') \gtrless qA'$. Demnach ist in der That $(A+B):A = (A'+B'):A'$ u. s. w.

7) „Aus $A:B > A':B'$ folgt $(A+B):B > (A'+B'):B'$." (Archimedes de sphaera etc. I. prop. 3.) — Denn aus $mA > nB$ neben $mA' < nB'$ ergiebt sich $m(A+B) > (m+n)B$ neben $m(A'+B') < (m+n)B'$.

8) „Aus $A:B > A':B'$ und $A' > B'$, folgt (nach dem 1. Satze in Nr. 3) $A > B$ und $(A-B):B > (A'-B'):B'$ (Archimedes l. c. I. prop. 7 — Beweis ähnlich wie beim vorhergehenden Satze), sowie $(A-B):A > (A'-B'):A'$."

9) „Aus $A:B = A':B'$ und $B:C = B':C'$ folgt neben $A \overset{>}{\underset{<}{=}} C$ entsprechend $A' \overset{>}{\underset{<}{=}} C'$" (V. 20). Ist z. B. $A > C$, so hat man nach dem 4. Satze $A:B > C:B$, also $A':B' > C':B'$ und nach dem 5. $A' > C'$.

10) „Aus $A:B = A':B'$ und $B:C = B':C'$ folgt

$$A:C = A':C'"$$

(V. 22). — Denn bedeuten p q irgend zwei natürliche Zahlen, so hat man nach dem 3. Satze

$$pA:B = pA':B' \qquad B:qC = B':qC',$$

somit nach dem 9. neben $pA \gtrless qC$ entsprechend $pA' \gtrless qC'$ d. i. $A:C = A':C'$. — Auf ähnliche Art wie der 9. Satz ergiebt sich:

11) „Aus

$$A:B \geqq A':B' \qquad B:C \geqq B':C'$$

(worin jedoch das Zeichen $=$ nur einmal vorkommen soll) folgt, wenn $A \leqq C$, $A' < C'$."

12) „Aus

$$A:B > A':B' \qquad B:C = B':C'$$

folgt $A:C > A':C'$." — Was auch p q für natürliche Zahlen sein mögen, so hat man

$$pA:B \geqq pA':B' \qquad B:qC \geqq B':qC',$$

also nach dem 11. Satze neben $pA < qC$ stets $pA' < qC'$. Somit mufs $A : C$ entweder gröfser oder gleich $A' : C'$ sein. Das letztere ist indefs nicht möglich, da nach dem 10. Satze $A : B = A' : B'$ sein müfste. — Man kann den Satz ohne Mühe dahin erweitern, dafs in den erstgenannten Relationen irgend eines der Zeichen $=$ $>$, nur nicht beide Male $=$, vorkommen darf.

13) „Aus

$$A : B = B' : C' \qquad B : C = A' : B'$$

folgt neben $A \gtreqless C$ entsprechend $A' \gtreqless C'$." (V. 21.) — Ist z. B. $A > C$, so hat man nach 4) $A : B > C : B$, also $B' : C' > B' : A'$ d. i. $C' < A'$.

14) „Aus

$$A : B = B' : C' \qquad B : C = A' : B'$$

folgt $A : C = A' : C'$." (V. 23.) — Für irgend ein Paar natürlicher Zahlen p q hat man nach 2) und 3)

$$pA : pB = qB' : qC' \qquad pB : qC = pA' : qC',$$

also nach dem 13. Satze neben $pA \gtrless qC$ stets entsprechend $pA' \gtrless qC'$ d. i. $A : C = A' : C'$. — Ähnlich wie 11) und 12) ergeben sich die Sätze:

15) „Aus

$$A : B \geqq B' : C' \qquad B : C \geqq A' : B'$$

folgt (bei höchstens einmaligem Vorkommen des Zeichens $=$), wenn $A < C$, $A' < C'$." — 16) „Aus

$$A : B > B' : C' \qquad B : C = A' : B'$$

folgt $A : C > A' : C'$."

17) „Aus

$$A : M = A' : M' \qquad B : M = B' : M'$$

folgt

$$(A \pm B) : M = (A' \pm B') : M',$$

im Falle des unteren Zeichens $A > B$ vorausgesetzt." (V. 24.) — Nach dem 10. Satze ist $A : B = A' : B'$, also nach dem 6.)

$$(A \pm B) : A = (A' \pm B') : A',$$

woraus durch nochmalige Anwendung von 10) die neue Proportion folgt.

5. Zweite Gruppe von Sätzen über Proportionen und Ungleichungen. Alle Glieder derselben müssen gleichartig sein. Sind das zweite oder dritte Glied einer Proportion einander gleich, so heiſst sie stetig.

1) „Ist $A : B = A' : B'$ und $A \gtreqless A'$, so hat man entsprechend $B \gtreqless B'$“ (V. 14).

2) „Ist $A : B = A' : B'$, so ist auch $A : A' = B : B'$.“ (V. 16.)

3) „Ist $A : B > A' : B'$, so hat man, wenn $A \leqq A'$, $B < B'$ und jedenfalls $A : A' > B : B'$.“

Diese Sätze sind nichts anderes als specielle Fälle der Sätze 13)—16) der vorigen Nr.; man hat nur dort

$$A' = B \qquad B' = C$$

zu setzen. — Mit Hilfe des 2) läſst sich zeigen, daſs aus jeder Proportion, deren Glieder gleichartig und von einander verschieden sind, durch Versetzung derselben sieben andere abgeleitet werden können.

4) „Aus $A : B = A' : B'$ folgt

$$(A \pm A') : (B \pm B') = A : B,$$

im Falle des unteren Zeichens $A > A'$ vorausgesetzt“ (V. 12 und 19). — Folgt mittelst des 2. Satzes aus dem 6) in Nr. 4. Auf ähnliche Weise wird der folgende Satz aus dem 7) in Nr. 4 abgeleitet.

5) „Ist $A : B > A' : B'$, so hat man

$$A : B > (A + A') : (B + B') > A' : B'.“$$

6. Bezeichnen α, β, γ gegebene rationale Zahlen, so wird zufolge Nr. 2 die Proportion $\xi : \gamma = \alpha : \beta$ durch die Zahl $\xi = \frac{\alpha\gamma}{\beta}$ befriedigt.

Satz. „In einem stetigen Gröſsensysteme giebt es zu einer Gröſse C eine und nur eine Gröſse X, sodaſs das Verhältniſs $X : C$ gleich einem gegebenen $A : B$, wobei A, B mit C nicht gleichartig zu sein brauchen.“

Beweis. Ist $A = B$, so ist $X = C$. Wenn A B ungleich sind z. B. $A > B$, so würde bei der Annahme, daſs es keine solche Gröſse X gebe, eine Lücke in dem Gröſsensysteme C, P sich zeigen. Nunmehr ist $P : C$ entweder kleiner oder gröſser als $A : B$. Ersteres tritt sicher ein wenn $P < C$, letzteres wenn $P > pC$, wo die Zahl p so gewählt ist, daſs $A < pB$. Bilden wir mit den Gröſsen P_1, wofür $P_1 : C < A : B$ die erste, aus den Gröſsen P_2, wofür $P_2 : C > A : B$ die zweite Gruppe, so können wir an ihnen leicht die in V. 8 verlangten Eigenschaften nachweisen. So giebt es, wenn wir P_1 nun eine bestimmte Gröſse der ersten Gruppe sein lassen, darin Gröſsen, die P_1 überschreiten. Da $P_1 : C < A : B$, so existiren Zahlen m n, sodaſs neben

$$mP_1 < nC \qquad mA > nB.$$

Nach V. 9 verfügt man über Gröſsen D, so daſs

$$mD < nC - mP_1$$

d. i.

$$m(P_1 + D) < nC,$$

also $(P_1 + D) : C < A : B$. U. s. f.[4])

7. **Satz.** „Es seien zwei Verhältnisse $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ gegeben. Bestimmt man zu einer beliebigen Gröſe M eines stetigen Systemes von absoluten Gröſsen eine Gröſse N, sodaſs $M : N = \mathfrak{a}$, und zu N eine Gröſse P, so daſs $N : P = \mathfrak{b}$, so ist das Verhältniſs $M : P$ eine von M unabhängige Gröſse.“ Denn ist

$$\mathfrak{a} = M : N = M' : N' \qquad \mathfrak{b} = N : P = N' : P',$$

so hat man nach dem 10. Satze in Nr. 4 $M : P = M' : P'$. Jedes der Verhältnisse $M : P = M' : P' = \ldots$ heiſst aus $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ zusammengesetzt[5]) und wird mit $\mathfrak{ab}$ bezeichnet.

Dabei bestehen die Sätze:

1) $\mathfrak{ab} = \mathfrak{ba}$. — Bestimmt man die Gröſse R so, daſs $M : N = P : R$, so ist wegen $N : P = N : P$ nach dem 14. Satze in Nr. 5 $M : P = N : R$ d. h. $\mathfrak{ab} = \mathfrak{ba}$.

2) $(\mathfrak{ab})\mathfrak{c} = \mathfrak{a}(\mathfrak{bc})$. — Setzt man $\mathfrak{c} = P : Q$, so ergiebt sich

$$\mathfrak{bc} = N : Q \qquad (\mathfrak{ab})\mathfrak{c} = \mathfrak{a}(\mathfrak{bc}) = M : Q.$$

3) Ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}'$, so hat man $\mathfrak{ab} = \mathfrak{a}'\mathfrak{b}$.

8. Bei den bis jetzt vorgeführten Begriffen sind die Griechen stehen geblieben. In den auf uns gekommenen geometrischen Schriften des Alterthumes findet sich keine deutliche Spur der Ansicht, dafs das Verhältnifs zweier incommensurabelen Gröfsen eine Zahl sei. Sie entwickelte sich vielmehr erst im 16. Jahrhunderte und verbreitete sich dann, ohne ernsthaften Widerstand zu finden. Als Ausdruck derselben mögen wir die folgende Definition betrachten, womit Newton's Arithmetica universalis anfängt: „Per numerum abstractam quantitatis cujusvis ad aliam ejusdem generis quantitatem, quae pro unitate habetur, rationem intelligimus." Sie bildet jedoch nur ein Paradestück, von dem weiter kein Gebrauch gemacht wird.

In Wahrheit führt die vorgetragene Lehre zu der folgenden Entwickelung. Nachdem man allen Verhältnissen, die dem der commensurabelen Gröfsen $A = aM$ $B = bM$ gleich sind, die rationale Zahl $\frac{a}{b}$ zugeordnet hat, wird man auch allen Verhältnissen, die dem zweier incommensurabelen Gröfsen A B gleich sind, eine absolute Zahl entsprechen lassen, welche der Exponent oder Index des Verhältnisses $A : B$ heifst. Da er nach Nr. 2 eine rationale Zahl nicht sein kann, so wird er als eine incommensurabele oder irrationale Zahl bezeichnet. Dem gröfseren Verhältnisse soll die gröfsere Zahl entsprechen. — Damit ist aber noch nicht alles gethan. Vielmehr erhebt sich nun erst die Frage, ob die neuen Zahlen ähnliche Eigenschaften besitzen wie die absoluten rationalen d. h. ob man mit ihnen so rechnen könne, wie mit diesen. Dafs das in der That zutrifft, läfst sich mit Hilfe der in Nr. 4—7 gegebenen Sätze leicht nachweisen.

9. Das Rechnen mit den geometrischen Verhältnissen. Addition und Subtraction. Nach Nr. 6 kann man jedes Verhältnifs in eines mit gegebenem Hintergliede M verwandeln. Setzt man nun

$$\mathfrak{a} = P : M \quad \mathfrak{b} = Q : M,$$

so ist nach dem 14. Satze in Nr. 7 das Verhältnifs $(P + Q) : M$ eine von M unabhängige Gröfse, die wir als die Summe $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ bezeichnen. — Durch Wiederholung der Schlüsse in

III. 12 erkennt man, dafs diese Addition denselben Regeln genügt, wie die der natürlichen Zahlen und dafs die Differenz $\mathfrak{a} - \mathfrak{b}$ stets möglich und eindeutig ist, wenn $\mathfrak{a} > \mathfrak{b}$.

Unter dem m-fachen von $\mathfrak{a}$ versteht man das Verhältnifs $mP:M$, unter dem m^{ten} Theile von $\mathfrak{a}$ das V. $P:mM$. — Ist $\mathfrak{a} > \mathfrak{b}$, so giebt es stets Vielfache von $\mathfrak{b}$, die gröfser als $\mathfrak{a}$ sind. Bestimmt man nämlich die ganze Zahl p so, dafs $pQ > P$, so ist $p\mathfrak{b} > \mathfrak{a}$. — Die geometrischen Verhältnisse gehören somit zu den absoluten Gröfsen im engeren Sinne.

Multiplication und Division. Das aus den Verhältnissen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ zusammengesetzte heifse ihr Product: $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$.[6]) — Das commutative und associative Gesetz, sowie die Regel, dafs neben

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}' \qquad \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \mathfrak{a}' \cdot \mathfrak{b}$$

sei, folgen unmittelbar aus Nr. 7. — Dafs neben

$$\mathfrak{a} > \mathfrak{a}' \qquad \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} > \mathfrak{a}'\mathfrak{b},$$

zeigt der 12. Satz in Nr. 4. — Die distributive Formel

$$(\mathfrak{a} \pm \mathfrak{b}) \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{c} \pm \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c}$$

erhellt sofort, wenn

$$\mathfrak{a} = P:M \quad \mathfrak{b} = Q:M \quad \mathfrak{c} = M:R$$

gesetzt werden. — Die Gleichung $\mathfrak{x}\mathfrak{b} = \mathfrak{a}$ wird erfüllt durch $\mathfrak{x} = P:Q$ und nur dadurch. Somit ist der Quotient

$$\frac{P:M}{Q:M} = P:Q.$$

10. So gelangt man mit Hilfe eines stetigen Gröfsensystemes $A, B, C\ldots$ zu einem Zahlensystem, das ebenfalls stetig ist. Jeder Lücke des einen Systemes würde nämlich eine des anderen entsprechen. Es wäre leicht, die irrationalen Zahlen $A:B$ in systematischer Form darzustellen. Dafs umgekehrt jedem systematischen Bruche ohne Ende, wenn nur beliebig viele Stellen desselben auf arithmetischem Wege bestimmt werden können, ein Gröfsenverhältnifs entspricht, wird aus der Stetigkeit des Systemes $A, B, C\ldots.$ gefolgert (vgl. VII. 13). — Unsere nächste Aufgabe bestände darin, uns bei der Vergleichung der neuen Zahlen untereinander, bei der arithmetischen Darstellung ihrer Summen, Producte u. s. w. von dem zu Grunde gelegten Gröſsensysteme frei zu machen. Wir ziehen es jedoch vor, die auf diesem Wege zu erzielenden Resultate mit Einschluſs des Zahlensystemes selbst direct d. h. ohne den Umweg über ein stetiges Gröſsensystem einzuschlagen, in die Arithmetik einzuführen. Dabei wird die Theorie der Verhältnisse von stetigen Gröſsen eine erhebliche Vereinfachung erfahren, so daſs die vorstehende entbehrlich wird.

Gleichwol verdient sie unsere Aufmerksamkeit. Und zwar nicht allein wegen ihrer schon betonten historischen Bedeutung als erster Versuch, ein System von (abstracten) Gröſsen zu definiren, sondern auch deſshalb, weil sie ein Verfahren an die Hand giebt, die absoluten Zahlen aus der reinen Geometrie abzuleiten. Das Wesen derselben besteht darin, geometrische Objecte zu bilden, welchen die nämlichen formalen Eigenschaften zukommen, wie den absoluten Zahlen. Als solche können, wie v. Staudt dargelegt hat,[7]) auch dienen die Würfe oder Doppelverhältnisse von je vier Elementen eines Grundgebildes erster Stufe.

Sowie v. Staudt alle reellen Zahlen erhalten hat, so können sie auch abgeleitet werden aus den Verhältnissen der relativen Gröſsen im engeren Sinne. Man erklärt dann die Verhältnisse von je zwei Strecken in derselben Geraden $AB : BC$, $A'B' : B'C'$ als einander gleich, wenn erstens die Verhältnisse der bezüglichen absoluten Strecken im Sinne von Nr. 2 einander gleich sind und zweitens die Punkte B, B' entweder beide innerhalb oder beide auſserhalb der Strecken AC, $A'C'$ liegen.

VII. Abschnitt.

Arithmetische Theorie der irrationalen Zahlen.

1. Wir haben VI. 8 der Einführung der irrationalen Zahlen vermittelst eines stetigen Gröfsensystemes gedacht. In neuerer Zeit hat man es vorgezogen, diese Theorie auf arithmetischem Boden zu entwickeln, wozu das im 3. Abschnitte auseinandergesetzte Verfahren der Begriffsbildung vollkommen ausreicht. Dabei kann man in verschiedener Weise zu Werke gehen. Bisher sind solche Theorien der irrationalen Zahlen von Weierstrafs, G. Cantor, R. Dedekind[1]) aufgestellt worden, wovon uns die Cantor'sche am leichtesten durchführbar zu sein scheint. Sie läfst sich ungezwungen an die Lehre von den systematischen Brüchen anknüpfen.

2. Nach IV. 6 ist eine rationale Zahl α entweder gleich einem Bruche von der Form

$$c_0 + \frac{c_1}{e} + \frac{c_2}{e^2} + \cdots + \frac{c_m}{e^m},$$

oder es giebt eine unbegrenzte, schliefslich periodische Reihe von ganzen Zahlen $c_0, c_1, c_2 \ldots$, so dafs wie grofs auch die positive ganze Zahl n sein mag,

$$\text{(a)} \quad c_0 + \frac{c_1}{e} + \cdots + \frac{c_n}{e^n} < \alpha < c_0 + \frac{c_1}{e} + \cdots + \frac{c_n + 1}{e^n}.$$

Dabei bedeutet e eine ganze positive Zahl > 2; c_0 kann jede beliebige ganze Zahl sein; $c_1, c_2 \ldots c_n \ldots$ sind Ziffern, also je auf die Werthe 0 bis $e - 1$ beschränkt. Umgekehrt entspricht jeder Reihe von ganzen Zahlen $c_0, c_1 \ldots$ von den eben angegebenen Eigenschaften, die schliefslich periodisch wird, eine rationale Zahl α, welche der Relation (a) genügt.

Nur in dem Falle, dafs die Periode aus der einen Ziffer $e - 1$ besteht, ist im zweiten Theile von (a) von einem bestimmten Werthe von n an das Zeichen $=$ statt $<$ einzusetzen.

Untersuchen wir nun näher die Beziehung des Werthes α zu dem systematischen Bruche

$$S_n = c_0 + \frac{c_1}{e} + \cdots + \frac{c_n}{e^n} \qquad (n = 0, 1, 2 \ldots).$$

Man wird sofort bemerken, dafs die positive Differenz $\alpha - S_n$ von einem bestimmten Werthe des Zeigers n an kleiner ist, als eine beliebige positive rationale Zahl ε. Genauer: Zu jeder positiven Zahl ε gehört eine positive Zahl μ, welche die Eigenschaft hat, dafs

$$0 < \alpha - S_n < \varepsilon$$

wenn nur $n > \mu$. In der That folgt aus (a)

$$0 < \alpha - S_n < \frac{1}{e^n} < \frac{1}{1 + n(e-1)}$$

(II. 9); nimmt man nun n so an, dafs

$$\frac{1}{1 + n(e-1)} < \varepsilon,$$

d. i.

$$n > \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon(e-1)},$$

so hat man

$$\alpha - S_n < \varepsilon.$$

Wir können demnach

$$\mu \geqq \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon(e-1)}$$

setzen. In Folge dieses Verhaltens nennt man α den Grenzwerth der Zahlen $S_0, S_1 \ldots S_n$ bei unbegrenzt wachsendem n, was kurz durch die Formel

$$\alpha = \lim_{n=+\infty} S_n$$

ausgedrückt wird. Es hat keine Schwierigkeit, den Begriff des Grenzwerthes etwas zu verallgemeinern. φ_n bedeute einen rationalen von der ganzen positiven Zahl n abhängigen Ausdruck und α eine rationale Zahl. Wenn dann zu jeder positiven rationalen Zahl ε eine positive rationale Zahl μ gehört, von der Eigenschaft, dafs stets

$$|\alpha - \varphi_n| < \varepsilon \qquad \text{(b)}$$

wenn nur $n > \mu$; so heifst α der Grenzwerth (limes) der Zahlen $\varphi_0, \varphi_1 \ldots \varphi_n \ldots$ bei unbegrenzt wachsendem n; wofür die abgekürzte Schreibweise gebraucht wird

$$\alpha = \lim_{n=+\infty} \varphi_n.$$ [2])

Von entscheidender Wichtigkeit hierbei ist die wirkliche Herstellung der Zahl μ, die, wenn nicht $\varphi_n = \alpha$, von ε abhängen mufs. Bevor sie nicht geleistet ist, darf von einem Grenzwerthe der Zahlen φ_n nicht gesprochen werden. Dabei darf man annehmen, dafs ε in (b) unter einer bestimmten, übrigens beliebigen positiven Zahl liege. — Ist insbesondere $\alpha = 0$, so mufs zu jeder positiven Zahl ε eine ebensolche μ gehören von der Eigenschaft, dafs stets $|\varphi_n| < \varepsilon$, wenn nur $n > \mu$.

Wenn die $\varphi_0, \varphi_1 \ldots$ sowie der Zeiger n selbst, bei wachsendem n gröfser werden, als jede positive rationale Zahl γ, so drückt man das kurz durch die Formel aus

$$\lim_{n=+\infty} \varphi_n = +\infty \text{ (unendlich)}$$

d. i. zu jeder positiven rationalen Zahl γ gehört eine ebensolche Zahl μ von der Eigenschaft, dafs stets $\varphi_n > \gamma$, wenn nur $n > \mu$. Endlich bedeutet die Formel

$$\lim_{n=+\infty} \varphi_n = -\infty$$

den Umstand, dafs zu jeder negativen rationalen Zahl $-\gamma$ eine positive rationale Zahl μ gehört von der Eigenschaft, dafs stets $\varphi_n < -\gamma$, wenn nur $n > \mu$.

3. Legt man sich eine unbegrenzte Reihe $\varphi_0, \varphi_1, \ldots \varphi_n \ldots$ vor, so liegt die Frage nahe, ob ihre Glieder einen rationalen Grenzwerth besitzen. Eine Bedingung, welcher die φ_n dann notwendig zu genügen haben, ergiebt sich unmittelbar aus (b). Es ist nämlich auch

$$|\alpha - \varphi_{n+r}| < \varepsilon \qquad (r = 1, 2 \ldots),$$

so dafs man schliefsen mufs

$$|\varphi_{n+r} - \varphi_n| < 2\varepsilon,$$

wenn nur $n > \mu$. Indem auch 2ε jede positive Zahl bedeuten kann, so gelangen wir hierdurch zu folgender notwendigen Bedingung: Sollen die $\varphi_0, \varphi_1 \ldots \varphi_n \ldots$ einen rationalen Grenzwerth α besitzen, so mufs zu jeder positiven Zahl ε eine ebensolche Zahl μ gehören von der Eigenschaft, dafs

$$|\varphi_{n+r} - \varphi_n| < \varepsilon \tag{c}$$

wenn nur $n > \mu$, gleichviel welchen der ganzzahligen Werthe 1, 2, ... auch r annehmen mag.

Allein diese Bedingung ist nicht hinreichend. Man kann leicht zeigen, dafs sie an den φ_n erfüllt sein kann, ohne dafs ein rationaler Grenzwerth vorhanden ist. Die Relation (c) besteht immer, wenn wir

$$\varphi_n = c_0 + \frac{c_1}{e} + \frac{c_2}{e^2} + \cdots + \frac{c_n}{e^n} = S_n$$

setzen, wobei wir unter $c_1, c_2 \ldots c_n \ldots$ eine unbegrenzte Reihe von Ziffern d. i. $0 \leqq c_r \leqq e - 1$) verstehen, von denen man beliebig viele berechnen kann. In der That ist nun (vgl. IV. 6)

$$0 \leqq S_{n+r} - S_n \leqq \frac{1}{e^n} - \frac{1}{e^{n+r}} < \frac{1}{e^n}, \tag{d}$$

so dafs für μ der schon oben benutzte Werth $\frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon\,(e - 1)}$ gesetzt werden kann.

Werden die $c_0, c_1 \ldots c_n \ldots$ schliefslich periodisch, so ist, wie wir bereits wissen, ein rationaler Grenzwerth für die S_n vorhanden. Wir zeigen nun, dafs umgekehrt, wenn ein rationaler Grenzwerth α für die S_n existiren soll, die Reihe $c_0, c_1 \ldots c_n \ldots$ schliefslich periodisch werden mufs. Es soll mithin zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\mu > 0$ gehören von der Eigenschaft, dafs $|\alpha - S_n| < \varepsilon$ für alle $n > \mu$. Angenommen nun, die Reihe $c_1, c_2 \ldots c_n \ldots$ werde nicht periodisch. Wir bemerken zunächst nach (d), dafs

$$S_{n+r} \geqq S_n \qquad S_{n+r} + \frac{1}{e^{n+r}} \leqq S_n + \frac{1}{e^n}. \tag{e}$$

Es sei m ein bestimmter Werth von n. Bei einem hinlänglich grofsen Werthe von r wird dann $S_{m+r} > S_m$ und für ein beliebiges s $S_{m+r+s} - \alpha > S_{m+r} - \alpha$ sein. Daraus folgt, dafs unmöglich $S_m \geqq \alpha$ sein kann, also $S_m < \alpha$ sein mufs. Es würde ja $S_n - \alpha$ von $n = m + r + 1$ an über der positiven Zahl $S_{m+r} - \alpha$ liegen und könnte somit nicht kleiner werden als jede Zahl $\varepsilon > 0$. Aus (e) wird auf ähnliche Weise geschlossen

$$\alpha - S_{m+r+s} > \alpha - \left(S_{m+r+s} + \frac{1}{e^{m+r+s}}\right)$$
$$> \alpha - \left(S_{m+r} + \frac{1}{e^{m+r}}\right),$$

so dafs $S_m + \frac{1}{e^m}$ unmöglich $\leqq \alpha$ sein kann, also $S_m + \frac{1}{e^m} > \alpha$ sein mufs. Soll aber zu einer rationalen Zahl α eine Folge von Ziffern $c_1, c_2, \ldots c_n \ldots$ gefunden werden, derart, dafs wie grofs auch m sein mag, die Relation

$$S_m < \alpha < S_m + \frac{1}{e^m}$$

bestehe, so mufs die Folge schliefslich periodisch werden.

Daraus folgt, falls die Ziffern $c_1, c_2 \ldots c_n \ldots$ sich nicht von einem bestimmten Gliede an periodisch wiederholen, so können die S_n keinen rationalen Grenzwerth haben. Es ist leicht, solche Gesetze für die Entwickelung der aufeinanderfolgenden Stellen $c_1, c_2 \ldots$ vorzuschreiben, dafs die Folge nicht periodisch sein kann. Man nehme z. B.

$$\varphi_n = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^6} + \cdots + \frac{1}{10^{\frac{n(n+1)}{2}}} \; (n = 1, 2 \ldots),$$

welche den Decimalbruch 0,1010010001 ... liefern.

4. Die so eben gemachte Bemerkung veranlafst uns, die Eigenschaften einer Folge von rationalen Zahlen $\varphi_0, \varphi_1 \ldots \varphi_n \ldots$, welche von einer unbegrenzt wachsenden ganzen Zahl n abhängen und zunächst blofs der folgenden Forderung genügen, näher zu untersuchen. Zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ gehöre eine positive Zahl μ von der Eigenschaft, dafs

$$|\varphi_{n+r} - \varphi_n| < \varepsilon \text{ wenn nur } n > \mu, \tag{f}$$

was immer auch r für eine ganze positive Zahl sein mag.

1. Satz. „Unter dieser Voraussetzung mufs einer der folgenden drei Fälle eintreten:

1) Zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ gehört eine Zahl $\mu > 0$, derart dafs

$$|\varphi_n| < \varepsilon \text{ wenn nur } n > \mu;$$

oder

2) Es existiren zwei positive rationale Zahlen $\varrho < \varrho'$, derart dafs $\varrho < \varphi_n < \varrho'$, wenn nur n über einer bestimmten positiven Zahl μ liegt; oder

3) Es existiren zwei negative rationale Zahlen

$$-\varrho' < -\varrho,$$

derart dafs

$$-\varrho' < \varphi_n < -\varrho,$$

wenn nur n über einer bestimmten positiven Zahl μ liegt.“

Aus (f) ergiebt sich nämlich, wenn m eine bestimmte ganze Zahl $> \mu$ bedeutet,

$$\varphi_m - \varepsilon < \varphi_{m+r} < \varphi_m + \varepsilon \qquad (r = 1, 2, 3 \ldots).$$

Findet sich nun, dafs $\varphi_m > \varepsilon$ oder dafs $\varphi_m < -\varepsilon$, so ist schon ersichtlich, dafs die φ_n die im zweiten oder dritten Falle ausgesprochene Eigenschaft besitzen. Wenn aber φ_m zwischen $-\varepsilon$ und ε liegt, so bleibt die Frage noch unentschieden. Dann setze man für ε nacheinander positive Zahlen $\varepsilon', \varepsilon'' \ldots \varepsilon^{(p)} \ldots$, die beständig abnehmen und kleiner werden, als jede rationale positive Zahl. Nun sind nur zwei Fälle denkbar. Entweder giebt es ein bestimmtes $\varepsilon^{(p)}$, wofür $\varphi_m > \varepsilon^{(p)}$ oder $\varphi_m < -\varepsilon^{(p)}$, oder es giebt keine solche Zahl. Im ersten Falle sind die φ_n der zweiten oder dritten Classe zuzuweisen; im zweiten gehören sie zur ersten Classe, indem man hat $-2\varepsilon^{(p)} < \varphi_{m+r} < 2\varepsilon^{(p)}$. Somit unterliegt es keinem Zweifel, dafs einer der drei im Satze erwähnten Fälle eintreten mufs; denn eine weitere Möglichkeit ist ausgeschlossen.

Welcher derselben aber bei einer concreten Annahme der φ_n zutreffe, kann auf dem angegebenen Wege nicht immer entschieden werden. Ueberhaupt ist bisher kein Verfahren aufgefunden worden, wodurch ersichtlich wäre, dafs in allen Fällen eine endliche Anzahl von Versuchen zur Herbeiführung der Entscheidung ausreicht.

Der vorstehende Satz ist für die folgende Theorie der irrationalen Zahlen unentbehrlich. Man könnte ihn auch mit Hilfe eines anderen in Nr. 11 zu erwähnenden Satzes beweisen.

2. Satz. „Genügen die φ_n der Bedingung (f), so gilt das nämliche sowol von den Zahlen $\gamma \pm \varphi_n$, als auch von den Zahlen $\gamma\varphi_n$; worin γ eine beliebige, von 0 verschiedene rationale Zahl bedeutet."

„Auch die Zahlen $\frac{1}{\varphi_n}$ entsprechen der Bedingung (f), falls nur $\lim\limits_{n=+\infty} \varphi_n$ nicht 0 ist, in welchem Falle $1 : \varphi_n$ den Grenzwerth $\pm\infty$ besitzt, wenn die φ_n von einem bestimmten Gliede der Folge an sämmtlich dasselbe Zeichen haben."

„Befriedigen auch die Zahlen ψ_n die Bedingung (f), so gilt dasselbe von den Folgen, welche bezüglich durch das allgemeine Glied $\varphi_n \pm \psi_n$, $\varphi_n \psi_n$ dargestellt sind. Die Folge $\psi_n : \varphi_n$ genügt der Relation (f) sicher dann, wenn $\lim\limits_{n=+\infty} \varphi_n$ nicht 0 ist."

Die Beweise dieser Sätze bieten sich unmittelbar dar. Nach dem 1. Satze läfst sich, falls $\lim \varphi_n$ nicht 0 ist, eine positive Zahl ϱ so bestimmen, dafs $|\varphi_n| > \varrho$ wenn nur $n > \mu$. Man findet daher

$$\left|\frac{1}{\varphi_{n+r}} - \frac{1}{\varphi_n}\right| = \left|\frac{\varphi_{n+r} - \varphi_n}{\varphi_n \varphi_{n+r}}\right| < \frac{|\varphi_{n+r} - \varphi_n|}{\varrho^2} < \frac{\varepsilon}{\varrho^2}.$$

Ist nun ε' irgend eine positive Zahl, so ermittle man eine Zahl $\varepsilon < \varepsilon' \varrho^2$. Ihr entspricht in (f) eine Zahl $\mu' > 0$. Läfst man M die gröfsere unter den Zahlen μ, μ' sein, so ergiebt sich

$$\left|\frac{1}{\varphi_{n+r}} - \frac{1}{\varphi_n}\right| < \varepsilon'; \quad \text{wenn nur } n > M.$$

Wird neben der Reihe φ_n noch eine zweite Reihe ψ_n von ähnlicher Beschaffenheit betrachtet, so kann man immer behaupten, daſs neben (f) auch die Relation bestehe

$$|\psi_{n+r} - \psi_n| < \varepsilon, \text{ wenn nur } n > \mu.$$

Somit folgt

$$|(\varphi_{n+r} + \psi_{n+r})| - (\varphi_n + \psi_n)| < 2\varepsilon, \text{ wenn nur } n > \mu.$$

Da ferner

$$\varphi_{n+r}\psi_{n+r} - \varphi_n\psi_n = \varphi_{n+r}(\psi_{n+r} - \psi_n) + \psi_n(\varphi_{n+r} - \varphi_n)$$

und nach dem 1. Satze solche positive Zahlen ϱ', σ' existiren müssen, daſs für $n > \mu'$

$$|\varphi_n| < \varrho' \qquad |\psi_n| < \sigma',$$

so wird für $n > M$

$$|\varphi_{n+r}\psi_{n+r} - \varphi_n\psi_n| < (\varrho' + \sigma')\,\varepsilon$$

sein, worin $(\varrho' + \sigma')\,\varepsilon$ jede positive Zahl sein kann.

Corollar. „Betrachtet man eine endliche Anzahl (p) Folgen φ_n, ψ_n, χ_n ... ω_n, welche sämmtlich der Relation (f) genügen, so gilt dasselbe von den Folgen, welche bezüglich durch das allgemeine Glied

$$\varphi_n + \psi_n + \chi_n + \cdots + \omega_n, \qquad \varphi_n \cdot \psi_n \cdot \chi_n \cdot \ldots \cdot \omega_n$$

dargestellt sind.“

3. Satz. „Wenn die φ_n einen rationalen Grenzwerth α besitzen, so haben auch die Zahlen $\gamma \pm \varphi_n$, sowie $\gamma\varphi_n$ je einen rationalen Grenzwerth und zwar ist er bezüglich $\gamma \pm \alpha$, $\gamma\alpha$. Wenn α nicht 0 ist, so haben auch die $1 : \varphi_n$ einen rationalen Grenzwerth, und zwar ist er $1 : \alpha$.“

„Haben auch die ψ_n einen rationalen Grenzwerth β, so auch die Ausdrücke $\varphi_n \pm \psi_n$, $\varphi_n\psi_n$, und zwar ist dieser Grenzwerth bezüglich $\alpha \pm \beta$, $\alpha\beta$. Die $\psi_n : \varphi_n$ haben den Grenzwerth $\beta : \alpha$, wenn α nicht Null ist.“

Auch die Beweise dieser Sätze ergeben sich unmittelbar aus der Relation (b), der wir die folgende an die Seite setzen können:

$$|\beta - \psi_n| < \varepsilon \text{ für alle } n > \mu.$$

Nun hat man nur die Unterschiede zu betrachten:

$$(\alpha + \gamma) - (\varphi_n + \gamma) = \alpha - \varphi_n, \qquad \gamma\alpha - \gamma\varphi_n = \gamma(\alpha - \varphi_n)$$

$$\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\varphi_n} = \frac{\varphi_n - \alpha}{\alpha\varphi_n},$$

$$(\alpha + \beta) - (\varphi_n + \psi_n) = (\alpha - \varphi_n) + (\beta - \psi_n),$$

$$\alpha\beta - \varphi_n\psi_n = \beta(\alpha - \varphi_n) + \alpha(\beta - \psi_n) - (\alpha - \varphi_n)(\beta - \psi_n).$$

Hieraus folgt nach (b) z. B., dafs für $n > \mu$

$$\left|\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\varphi_n}\right| < \frac{\varepsilon}{\varrho \cdot |\alpha|}$$

und da $\varepsilon : \varrho\,|\alpha|$ jede positive Zahl sein kann,

$$\lim_{n=+\infty} \frac{1}{\varphi_n} = \frac{1}{\alpha}.$$

Aehnlich hat man — $\varepsilon < 1$ vorausgesetzt — für $n > \mu$

$$|\alpha\beta - \varphi_n\psi_n| < \varepsilon\{|\alpha| + |\beta| + \varepsilon\} < \varepsilon\,\{|\alpha| + |\beta| + 1\};$$

somit, da der letzte Ausdruck jede positive Zahl sein kann,

$$\lim_{n=+\infty} \varphi_n\beta_n = \alpha\beta.$$

Corollar. „Sind eine endliche Anzahl (p) Ausdrücke $\varphi_n, \psi_n, \chi_n \ldots \omega_n$ vorgelegt, deren jeder einen rationalen Grenzwerth besitzt, so hat die Summe $\varphi_n + \psi_n + \chi_n + \cdots + \omega_n$ zum Grenzwerth die Summe, das Product $\varphi_n \cdot \psi_n \cdot \chi_n \cdot \ldots \cdot \omega_n$ zum Grenzwerthe das Product der Grenzwerthe der einzelnen Glieder.“

5. Definition der irrationalen Zahlen. Wenn die rationalen Zahlen φ_n die Forderung (f) befriedigen, einen rationalen Grenzwerth jedoch nicht besitzen, so denken wir uns durch die unbegrenzte Reihe $\varphi_0, \varphi_1 \ldots$ ein neues von jeder rationalen Zahl verschiedenes Object gesetzt, wodurch zunächst nichts weiter ausgedrückt ist, als dafs wir sie im Gegensatze zu ihren einzelnen Gliedern als ein Ding für sich auffassen. Vorläufig wenden wir für das neue Object die Bezeichnung $(\varphi_0, \varphi_1 \ldots)$ oder kürzer (φ_n) an. Zugleich wollen wir, um Unterscheidungen im Folgenden zu vermeiden, wenn den Gliedern φ_n ein rationaler Grenzwerth zukömmt, ihn unter dem Zeichen (φ_n) verstehen.[2*])

Hierbei ist hervorzuheben, dafs die Entscheidung, ob ein vorgelegter rationaler Ausdruck φ_n einen rationalen Grenzwerth besitze oder nicht, nicht durch eine allgemeine Methode herbeigeführt werden kann, sondern jedem Falle eigenthümliche, oft umständliche Untersuchungen verlangt.

Der 1. und 2. Satz der vorigen Nr. gestatten nun, die neuen Objecte untereinander und mit den rationalen Zahlen zu vergleichen, d. i. sie als Gröfsen aufzufassen, die mit den rationalen Zahlen zu einem Systeme zusammentreten, welches das der reellen Zahlen genannt wird. Die neuen Zahlen selbst erhalten in demselben das Prädicat „irrational".

Betrachten wir nämlich zwei der neuen Objecte (φ_n), (ψ_n), so genügt auch die aus den Differenzen $\varphi_0 - \psi_0$, $\varphi_1 - \psi_1 \ldots$ gebildete Folge der charakteristischen Forderung (f), so dafs sie entweder zu einem rationalen Grenzwerthe oder zu einem neuen Objecte $(\varphi_n - \psi_n)$ führt.

1. Definition. „Man sagt $(\varphi_n) = (\psi_n)$, falls

$$\lim_{n=+\infty} (\varphi_n - \psi_n) = 0$$

d. i. zu jeder rationalen Zahl $\varepsilon > 0$ eine eben solche Zahl $\mu > 0$ gehört, derart dafs $|\varphi_n - \psi_n| < \varepsilon$, wenn nur $n > \mu$ genommen wird."

2. Definition. „Man sagt $(\varphi_n) > \alpha$ (rationale Zahl), wenn eine positive rationale Zahl ϱ existirt, derart dafs $\varphi_n - \alpha > \varrho$, wenn nur n gröfser ist als eine bestimmte Zahl $\mu > 0$."

„Man sagt $(\varphi_n) < \alpha$, wenn eine negative rationale Zahl $-\varrho$ existirt, derart dafs $\varphi_n - \alpha < -\varrho$ für alle $n > \mu$."

Auf ähnliche Art wird man die Relationen $\alpha > (\varphi_n)$, $\alpha < (\varphi_n)$ erklären.

3. Definition. „Man sagt $(\varphi_n) > (\psi_n)$, wenn eine positive rationale Zahl ϱ existirt, derart dafs $\varphi_n - \psi_n > \varrho$ für alle $n > \mu$; und $(\varphi_n) < (\psi_n)$, wenn eine negative rationale Zahl $-\varrho$ existirt, derart dafs $\varphi_n - \psi_n < -\varrho$ für alle $n < \mu$."

Es ist unmittelbar ersichtlich, dafs die in I. 2, 3 aufgestellten formalen Forderungen durch diese Definitionen erfüllt werden. Man braucht sich nur an die Formel

$$\varphi_n - \chi_n = (\varphi_n - \psi_n) + (\psi_n - \chi_n)$$

zu erinnern. Dafs die Disjunction: gleich, gröfser, kleiner vollständig sei, erhellt aus dem 1. Satze in Nr. 4, den man nur auf die Ausdrücke $\alpha - \varphi_n$, $\varphi_n - \alpha$, $\varphi_n - \psi_n$ anzuwenden hat.

Nach der 2. Definition ist $(\varphi_n) > 0$, wenn eine solche rationale positive Zahl ϱ existirt, dafs für alle $n > \mu$ $\varphi_n > \varrho$, und $(\varphi_n) < 0$, wenn eine solche negative rationale Zahl existirt, dafs für alle $n > \mu$ $\varphi_n < -\varrho$. Eine irrationale Zahl der ersten Art soll positiv, eine der zweiten Art negativ heifsen. Für jede von 0 verschiedene Zahl (φ_n) werden die φ_n schliefslich gleichbezeichnet; daher ist $(|\varphi_n|)$ eine positive irrationale Zahl, die der absolute Betrag von (φ_n) genannt und mit $|(\varphi_n)|$ bezeichnet wird. Nach dem 1. Corollar ist $|(\varphi_n)| = (\varphi_n)$ oder $(-\varphi_n)$, je nachdem $(\varphi_n) >$ oder < 0.

Corollare. 1. „Wird aus der unbegrenzten Folge der ganzen Zahlen 0, 1, 2 ... eine andere unbegrenzte Folge $k_1, k_2, \ldots k_n \ldots$ herausgehoben, so ist $(\varphi_n) = (\varphi_{k_n})$."

2. „Ist für $n > \mu$ $\varphi_n > \alpha$ (rationale Zahl), so ist $(\varphi_n) \geqq \alpha$. Wenn aber $(\varphi_n) < \alpha$, so ist $(\varphi_n) \leqq \alpha$." — Denn wäre im ersten Falle $(\varphi_n) < \alpha$, so müfste schliefslich

$$\varphi_n - \alpha < -\varrho < 0$$

also $\varphi_n < \alpha$ sein.

3. „Ist für $n > \mu$

$$\varphi_n > \psi_n,$$

so folgt

$$(\varphi_n) \geqq (\psi_n)."$$

4. „Zu jeder rationalen Zahl $\varepsilon > 0$ gehört eine solche Zahl $\mu > 0$, dafs

$$\varphi_n - \varepsilon < (\varphi_n) < \varphi_n + \varepsilon \qquad (n > \mu)."$$

Denn nach (f) hat man für $\varepsilon' < \varepsilon$ und $r = 1, 2 \ldots$

$$\varphi_n - \varepsilon' < \varphi_{n+r} < \varphi_n + \varepsilon' \qquad (n > \mu');$$

somit nach 1. und 2., da

$$(\varphi_{n+r}) = (\varphi_n), \quad \varphi_n - \varepsilon' \leqq (\varphi_n) \leqq \varphi_n + \varepsilon',$$

woraus der Satz unmittelbar folgt. — Man schliefst aus der vorstehenden Relation, dafs „zwischen je zwei reellen Zahlen $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$ unbegrenzt viele rationale Zahlen liegen.“ Sind z. B. beide Zahlen irrational:

$$\mathfrak{a} = (\varphi_n), \qquad \mathfrak{b} = (\psi_n),$$

so weifs man, dafs für alle $n > \mu$

$$\psi_n - \varphi_n > \varrho > 0.$$

Demnach hat man, wenn $2\varepsilon \leqq \varrho$,

$$\varphi_n + \varepsilon < \psi_n - \varepsilon$$

und somit bei hinlänglich grofsen Werthen von n

$$\mathfrak{a} < \varphi_n + \varepsilon < \psi_n - \varepsilon < \mathfrak{b}.$$

5. „Eine Zahl (φ_n), deren absoluter Betrag kleiner ist als jede positive Zahl $\mathfrak{e}$, ist Null.“[3])

Denn wäre $(\varphi_n) > 0$, also ihr absoluter Betrag ebenfalls (φ_n), so hätte man für $n > \mu$

$$\varphi_n > \varrho > 0,$$

somit $(\varphi_n) \geqq \varrho$ gegen die Voraussetzung. Ebensowenig kann $(\varphi_n) < 0$ sein.

6. „Wenn die φ_n mit wachsendem n nicht abnehmen (zunehmen), so ist (φ_n) gröfser (kleiner) als jedes φ_n.“

Wenn die φ_n nicht schliefslich alle gleich werden, so giebt es eine ganze Zahl $k > 0$, derart, dafs

$$\varphi_{m+k} > \varphi_m.$$

Setzt man in 4.

$$\varepsilon = \varphi_{m+k} - \varphi_m,$$

so folgt bei hinlänglich grofsem $r > k$

$$(\varphi_n) > \varphi_{m+r} - (\varphi_{m+k} - \varphi_m) > \varphi_m.$$

7. „Betrachtet man, wie in Nr. 3, eine irrationale Zahl von der systematischen Form

$$\mathfrak{c} = (S_n) = \left(c_0 + \frac{c_1}{e} + \cdots + \frac{c_n}{e^n}\right) = \left(S_n + \frac{1}{e^n}\right),$$

so besteht, was immer auch n für einen der Werthe 0, 1, 2 ... haben mag, die Relation

$$S_n < \mathfrak{c} < S_n + \frac{1}{e^n}.\text{“}$$

Sie ergiebt sich aus dem vorhergehenden Satze unmittelbar, denn die S_n nehmen bei wachsenden n nicht ab, die $S_n + \frac{1}{e^n}$ nicht zu. (Vgl. Nr. 3.)

NB. Dafs man jede irrationale Zahl (φ_n) in systematischer Form darstellen könne, wird in Nr. 11 gezeigt werden.

Als Beispiel zum Vorstehenden möge der folgende Satz dienen. „Zu den rationalen Zahlen

$$\varphi_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \qquad (n = 1, 2 \ldots),$$

wo $n!$ das Product aller natürlichen Zahlen von 1 bis n bedeutet, gehört eine irrationale Zahl, die gewöhnlich mit e bezeichnet wird.“ — Man bemerkt unmittelbar dafs

$$\varphi_{n+r} > \varphi_n.$$

Ferner hat man

$$\varphi_{n+r} - \varphi_n = \frac{1}{(n+1)!}\left\{1 + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{(n+2)\ (n+3) \ldots (n+r)}\right\},$$

somit nach IV. 6

$$\varphi_{n+r} - \varphi_n < \frac{1}{(n+1)!}\left\{1 + \frac{1}{(n+1)} + \cdots + \frac{1}{(n+1)^{r-1}}\right\}$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\,\frac{1 - \frac{1}{(n+1)^r}}{1 - \frac{1}{n+1}} < \frac{1}{n \cdot n!}. \tag{h}$$

Bezeichnet nun m irgend eine natürliche Zahl, so ist für $n > m$

$$\varphi_{n+r} - \varphi_n < \frac{1}{m \cdot m!}\,\frac{1}{(m+1)^{n-m+1}} < \frac{(m+1)^{m-1}}{m \cdot m!\,(1 + n \cdot m)},$$

so dafs $\varphi_{n+r} - \varphi_n$ sicher $< \varepsilon$ ist, wenn

$$n > \frac{1}{m}\left\{\frac{(m+1)^{m-1}}{m \cdot m!\, \varepsilon} - 1\right\}.$$

Also giebt es eine Zahl $(\varphi_n) = e$ und zwar ist $e > \varphi_n$. — Nehmen wir an, es sei e rational und zwar in reducirter Form

$$e = \frac{p}{q} \qquad (q \geqq 1).$$

Nach (h) findet man

$$\varphi_q < \varphi_{q+r} < \varphi_q + \frac{1}{q \cdot q!},$$

aber auch, da im zweiten Gliede statt $\frac{1}{n+1}$ $\frac{1}{n+2}$ gesetzt werden kann,

$$\varphi_{q+r} < \varphi_q + \frac{1}{(q+1)!}\frac{q+2}{q+1} < \varphi_q + \frac{1}{q \cdot q!}.$$

Nun ist $(\varphi_{q+r}) = e$. Somit ergiebt sich

$$\varphi_q < e < \varphi_q + \frac{1}{q!\,q}$$

oder

$$q \cdot q!\,\varphi_q > q \cdot q!\,e < q \cdot q!\,\varphi_q + 1.$$

Nach Voraussetzung mufs $q \cdot q!\,e$ eine ganze Zahl sein, kann somit nicht zwischen zwei aufeinander folgenden ganzen Zahlen liegen. Folglich mufs e irrational sein.

6. Addition der irrationalen Zahlen.

4. Definition. „Unter den Summen $\alpha + (\varphi_n)$ und $(\varphi_n) + \alpha$, wo α rational ist, verstehen wir die irrationale Zahl $(\varphi_n + \alpha)$. Die Zahl $(\varphi_n + \psi_n)$ heifst die Summe der irrationalen Zahlen (φ_n) und (ψ_n).“

$$\alpha + (\varphi_n) = (\varphi_n) + \alpha = (\varphi_n + \alpha); \quad (\varphi_n) + (\psi_n) = (\varphi_n + \psi_n).$$

Die Definition beruht auf dem 2. Satze in Nr. 4. Aus dem 3. Satze daselbst entnehmen wir, dafs wenn (φ_n), (ψ_n) rationale Grenzwerthe α, β bedeuten, $(\varphi_n + \psi_n)$ mit $\alpha + \beta$ übereinstimmt. Die analoge Bemerkung wird man auch zu den folgenden Nr. 7—9 zu machen haben.

Bezeichnen nun $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ ... reelle Zahlen überhaupt, so wird man aus der vorstehenden Definition ohne jede Schwierigkeit die folgenden Formeln ableiten können.

1) $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a}$.

2) $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + \mathfrak{c} = \mathfrak{a} + (\mathfrak{b} + \mathfrak{c})$.

3) Ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}'$, so ist $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{a}' + \mathfrak{b}$.

4) Ist $\mathfrak{a} > \mathfrak{a}'$, so ist $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} > \mathfrak{a}' + \mathfrak{b}$.

5) Ist $\mathfrak{b} > 0$, so ist $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} > \mathfrak{a}$.

Damit ist aber erwiesen, dafs bei der Addition der reellen Zahlen genau dieselben Regeln gelten, wie bei der von rationalen Zahlen.

7. Subtraction der irrationalen Zahlen. Die Gleichungen

$$\alpha + \mathfrak{x} = (\varphi_n), \qquad (\varphi_n) + \mathfrak{x} = \alpha, \qquad (\varphi_n) + \mathfrak{x} = (\psi_n)$$

haben bez. die Auflösungen

$$\mathfrak{x} = (\varphi_n - \alpha), \qquad (\alpha - \varphi_n), \qquad (\psi_n - \varphi_n)$$

und wegen 6, 4) je nur diese eine. Man bezeichnet sie bez. mit

$$(\varphi_n) - \alpha, \qquad \alpha - (\varphi_n), \qquad (\psi_n) - (\varphi_n).$$

Ist $(\varphi_n) = (\psi_n)$, so ergiebt sich $\mathfrak{x} = 0$, und wenn $(\psi_n \gtrless (\varphi_n)$, simultan $\mathfrak{x} \gtrless 0$. — Wenn

$$(\varphi_n) + (\psi_n) = 0 \quad \{\text{d. i. wenn } (\varphi_n + \psi_n) = 0\},$$

so folgt

$$(\psi_n) = 0 - (\varphi_n),$$

wofür man kürzer

$$(\psi_n) = -(\varphi_n)$$

schreibt. Die Zahlen (φ_n) und $-(\varphi_n)$ heifsen einander entgegengesetzt. Insbesondere ist

$$(-\varphi_n) = -(\varphi_n).$$

Aus den oben angeführten Gesetzen der Addition und der Möglichkeit und Eindeutigkeit der Subtraction in jedem Falle, ergeben sich auch hier dieselben Regeln für das Rechnen mit Summen und Differenzen, wie bei den rationalen Zahlen.

Corollare. 1) Zwei reelle Zahlen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$, deren Differenz dem absoluten Betrage nach kleiner ist, als jede positive Zahl $\mathfrak{e}$, sind einander gleich.

Nach dem 5. Corollare in Nr. 5 ist nämlich $\mathfrak{a} - \mathfrak{b} = 0$, also mufs $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ sein.

2) Ist die Differenz $\mathfrak{a} - \mathfrak{b}$ kleiner als jede Zahl $\mathfrak{e} > 0$, so ist $\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{b}$.

Indirect zu beweisen.

3) „Es sei (φ_n) eine reelle Zahl. Dann gehört zu jeder positiven Zahl eine positive Zahl μ, derart dafs

$$|(\varphi_n) - \varphi_n| < \mathfrak{e},$$

wenn nur $n > \mu$.“

Setzt man im 4. Cor. der Nr. 5 für ε eine rationale Zahl $\leqq \mathfrak{e}$, so folgt

$$\varphi_n - \mathfrak{e} < (\varphi_n) < \varphi_n + \mathfrak{e}$$

für alle $n > \mu$, somit

$$|(\varphi_n) - \varphi_n| < \mathfrak{e}.$$

Nunmehr sind wir berechtigt, auch eine irrationale Zahl (φ_n) als Grenzwerth von φ_n bei unbeschränkt wachsenden n zu bezeichnen, so dafs von nun an die Schreibweisen (φ_n) und $\lim \varphi_n$ als gleichbedeutend anzusehen sind.

8. Multiplication der irrationalen Zahlen.

5. Definition. „Bedeutet α eine von Null verschiedene rationale Zahl, so nenne man die irrationale Zahl $(\alpha\varphi_n)$ das Product $\alpha \cdot (\varphi_n)$ oder $(\varphi_n) \cdot \alpha$. — Ferner sei

$$0 \cdot (\varphi_n) = (\varphi_n) \cdot 0 = 0.$$

Endlich verstehe man unter dem Producte $(\varphi_n) \cdot (\psi_n)$ dieser irrationalen Zahlen die Zahl $(\varphi_n \psi_n)$.“ (Vgl. wieder Nr. 4, 2. Satz.)

$$\alpha \cdot (\varphi_n) = (\varphi_n) \cdot \alpha = (\alpha\varphi_n) \qquad (\varphi_n) \cdot (\psi_n) = (\varphi_n \psi_n).$$

Diese Benennungen sind völlig berechtigt, denn wie unmittelbar erhellt, bestehen die folgenden Formeln:

1) $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\mathfrak{a}$.
2) $(\mathfrak{a}\mathfrak{b})\mathfrak{c} = \mathfrak{a}(\mathfrak{b}\mathfrak{c})$.
3) $(\mathfrak{b} + \mathfrak{c})\,\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\mathfrak{a} + \mathfrak{c}\mathfrak{a}$.
4) Ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}'$, so hat man $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{a}'\mathfrak{b}$.
5) Ist $\mathfrak{a} > \mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b} > 0$, so hat man $\mathfrak{a}\mathfrak{b} > \mathfrak{a}'\mathfrak{b}$.

Daraus folgt, dafs bei der Multiplication der reellen Zahlen genau dieselben Regeln gelten, wie bei der der rationalen Zahlen.

9. Division der irrationalen Zahlen. Die Glei-

chung $\alpha\mathfrak{x} = (\varphi_n)$ hat die Lösung $\mathfrak{x} = \left(\frac{\varphi_n}{\alpha}\right)$, wenn nur die rationale Zahl α nicht 0 ist. — Die Gleichungen

$$(\varphi_n)\,\mathfrak{x} = \alpha \qquad (\varphi_n)\,\mathfrak{x} = (\psi_n),$$

worin (φ_n), (ψ_n) irrationale Zahlen bedeuten, haben bezüglich die Lösung

$$\mathfrak{x} = \left(\frac{\alpha}{\varphi_n}\right), \quad \left(\frac{\psi_n}{\varphi_n}\right).$$

Und zwar haben diese Gleichungen nach dem 5. Satze der vorigen Nummer je nur diese eine Lösung, welche wir bezüglich mit

$$(\varphi_n):\alpha, \qquad \alpha:(\varphi_n), \qquad (\varphi_n):(\psi_n)$$

bezeichnen werden. Keiner dieser Quotienten ist Null.

Die Division ist mithin stets möglich, wenn der Divisor nicht Null ist, und zwar in eindeutiger Weise. Aus diesem Satze folgt im Vereine mit den oben nachgewiesenen Gesetzen der Multiplication, dafs bezüglich des Rechnens mit Producten und Quotienten auch hier die aus der Arithmetik der rationalen Zahlen bekannten Regeln gelten.[4])

10. Nachdem nunmehr erwiesen ist, dafs die von uns eingeführten Zahlen die vier Species nach denselben Regeln, wie bei den rationalen Zahlen, zulassen, tritt ihre Analogie mit diesen klar zu Tage. Sie geht noch weiter, indem für die positiven irrationalen Zahlen auch das Axiom des Archimedes besteht d. h. der Satz: „Ist $\mathfrak{a} > \mathfrak{b} > 0$ so giebt es doch ein Vielfaches von $\mathfrak{b}$, welches $\mathfrak{a}$ übertrifft: $p\mathfrak{b} > \mathfrak{a}$.“ Nach Nr. 5, 4 giebt es stets rationale Zahlen α, β derart, dafs $\alpha > \mathfrak{a} > \mathfrak{b} > \beta$ und da ganze positive Zahlen p existiren, so dafs $p\beta > \alpha$, so folgt $p\mathfrak{b} > \mathfrak{a}$.

Daraus kann man schliefsen, dafs jede irrationale Zahl (φ_n) zwischen zwei ganzen Zahlen c_0, $c_0 + 1$ liegen mufs, und weiterhin dafs jedes (φ_n) durch den Grenzwerth eines systematischen Bruches S_n ersetzt werden kann, was wir in Nr. 11 auf eine andere Art nachweisen werden.

Jede reelle Zahl $\mathfrak{a}$ läfst sich auf die Form bringen

$$\mathfrak{a} = c + \mathfrak{r}$$

wo c eine ganze Zahl bedeutet und

$$0 \leqq \mathfrak{r} < 1$$

ist; oder auch auf die Form

$$\mathfrak{a} = c' + \mathfrak{r}'$$

wo c' wieder eine ganze Zahl und

$$-\tfrac{1}{2} < \mathfrak{r}' \leqq \tfrac{1}{2}$$

ist.

Das System der reellen Zahlen zwischen irgend zwei derselben $\mathfrak{a} < 0$, $\mathfrak{b} > 0$ ist stetig (V. 8). Angenommen es sei Π ein innerhalb dieser Grenzen zusammenhängendes System von reellen Zahlen (ein solches kann stets aus rationalen Zahlen gebildet werden) und es seien $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$ die beiden Classen eines Schnittes desselben. Bestimmt man zwei ganze Zahlen a, b derart, daſs

$$a \leqq \mathfrak{a} < a + 1, \qquad b - 1 < \mathfrak{b} \leqq b,$$

so wird unter den Intervallen

$$(a,\ a + 1 \ldots - 1,\ b)$$

eines und nur eines $(c_0,\ c_0 + 1)$ vorkommen, das Zahlen der beiden Classen enthält. Desgleichen wird unter den e Intervallen

$$\left(c_0,\ c_0 + \frac{1}{e}\right) \cdots \left(c_0 + \frac{e-1}{e},\ c_0 + 1\right)$$

ein und nur ein solches Intervall vorkommen u. s. f. Auf die angegebene Weise gelangt man zu einer Folge von ganzen Zahlen $c_0, c_1, c_2 \ldots$, die von der zweiten an Ziffern bedeuten von der folgenden Eigenschaft. Jedes Intervall

$$\left(S_n,\quad S_n + \frac{1}{e^n}\right) \qquad (n + 0, 1, 2 \ldots)$$

enthält Zahlen beider Classen. Dabei hat S_n (sowie e) dieselbe Bedeutung, wie in Nr. 2. Es ist nun zu zeigen, daſs die Zahl

$$\mathfrak{c} = \left(c_0 + \frac{c_1}{e} + \frac{c_2}{e^2} + \cdots + \frac{c_n}{e^n}\right)$$

gröſser als alle Zahlen $\mathfrak{m}_1$ der ersten und kleiner als alle Zahlen $\mathfrak{m}_2$ der zweiten Classe ist und daſs es neben ihr keine zweite reelle Zahl von derselben Beschaffenheit giebt. Gäbe es in der ersten Classe eine Zahl $\mathfrak{m}_1 > \mathfrak{c}$, so müſste sie ebenfalls in jedem Intervalle

$$\left(S_n, \quad S_n + \frac{1}{e^n}\right)$$

liegen; da aber

$$S_n < \mathfrak{c} \leqq S_n + \frac{1}{e^n}$$

so würde folgen

$$0 < \mathfrak{m}_1 - \mathfrak{c} < \frac{1}{e^n} \text{ d. i. } \mathfrak{c} = \mathfrak{m}_1.$$

In derselben Art folgt, daſs keine Zahl $\mathfrak{m}_2$ der zweiten Gruppe kleiner sein kann als $\mathfrak{c}$. — Und wenn neben $\mathfrak{c}$ noch eine andere Zahl $\mathfrak{c}'$ existirte, gröſser als alle $\mathfrak{m}_1$ und kleiner als alle $\mathfrak{m}_2$, so müſste sie ebenfalls in jedem Intervalle

$$\left(S_n, \quad S_n + \frac{1}{e^n}\right)$$

liegen, woraus wieder nach dem 2. Corollar in Nr. 7 zu schlieſsen wäre: $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}'$.

11. Sowie es Folgen von rationalen Zahlen $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ giebt, welche der Relation (f) in Nr. 4 Genüge leisten, so kann man dasselbe auch von einer Folge irrationaler Zahlen $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2 \ldots \mathfrak{f}_n \ldots$ annehmen. Wir setzen also voraus, daſs diese Zahlen die folgende Eigenschaft besitzen. Zu jeder positiven Zahl $\mathfrak{e}$ gehört eine positive Zahl $\mathfrak{m}$, derart daſs

$$(1) \qquad |\mathfrak{f}_{n+r} - \mathfrak{f}_n| < \mathfrak{e} \qquad \text{für alle } n > \mathfrak{m},$$

was auch r für eine ganze positive Zahl sein mag. Man braucht aber nicht mehr neue Zahlen $(\mathfrak{f}_n)$ einzuführen; denn es läſst sich zeigen, daſs stets eine und nur eine reelle Zahl $\mathfrak{c}$ existirt, welche der Grenzwerth der $\mathfrak{f}_n$ ist. D. h. es läſst sich jeder positiven Zahl $\mathfrak{e}$ eine positive Zahl $\mathfrak{m}$ derart zuordnen, daſs

$$|\mathfrak{c} - \mathfrak{f}_n| < \mathfrak{e} \qquad \text{für alle } n > \mathfrak{m}.$$

Um den Beweis dieses Satzes zu führen, wollen wir, was hier am nächsten zu liegen scheint, zeigen, dafs eine Folge von ganzen Zahlen $c_0, c_1, c_2 \ldots$

$$c_0 \gtreqless 0, \quad 0 \leqq c_p \leqq e-1 \quad \text{für } p \geqq 1$$

so dafs

$$\text{(1*)} \qquad S_p < \mathfrak{f}_n < S_p + \frac{1}{e^p} \qquad \text{für } n > m_p > 0,$$

sicher dann existirt, wenn die $\mathfrak{f}_n$ keinen rationalen Grenzwerth von der Form S_m besitzen. Dabei haben e, S_p dieselbe Bedeutung wie in Nr. 2.

Der Satz geht unmittelbar aus dem folgenden hervor: „Es sei q eine ganze positive Zahl. Wenn die $\mathfrak{f}_n$ keinen rationalen Grenzwerth mit dem Nenner q besitzen, so existirt sicher eine ganze Zahl h, derart dafs

$$\frac{h}{q} < \mathfrak{f}_n < \frac{h+1}{q} \qquad \text{für alle } n > M.\text{“}$$

Aus (1) ergiebt sich, wenn $\mathfrak{e} = \frac{1}{2q}$ und die ganze Zahl m gröfser als das zugehörige $\mathfrak{m}$ vorausgesetzt wird,

$$\mathfrak{f}_m - \frac{1}{2q} < \mathfrak{f}_{m+r} < \mathfrak{f}_m + \frac{1}{2q} \qquad (r = 1, 2 \ldots).$$

Man bringe $\mathfrak{f}_m$ auf die Form

$$\mathfrak{f}_m = \frac{Q}{q} + \varrho \qquad \left(-\frac{1}{2q} < \varrho \leqq \frac{1}{2q}\right),$$

worin Q eine ganze Zahl bedeutet. Ist zufällig $\varrho = \frac{1}{2q}$, so findet man

$$\frac{Q}{q} < \mathfrak{f}_{m+r} < \frac{Q+1}{q},$$

kann somit $h = Q$ setzen. Wenn aber ϱ nicht diesen Werth hat, so ergiebt sich zunächst nur, dafs

$$\frac{Q-1}{q} < \mathfrak{f}_{m+r} < \frac{Q+1}{q}.$$

Um das Intervall der Grenzen auf $\frac{1}{q}$ einzuschränken, kann man so verfahren. Man setze in (1)

$$\mathfrak{e} = 1 : 2qe^s \qquad (s \geqq 1),$$

wonach sich ergiebt

$$\mathfrak{f}_{m^{(s)}} - \frac{1}{2q \cdot e^s} < \mathfrak{f}_{m^{(s)}+r} < \mathfrak{f}_{m^{(s)}} + \frac{1}{2q \cdot e^s}.$$

Nach Ausführung der Rechnung

$$\mathfrak{f}_{m^{(s)}} = \frac{Q^{(s)}}{q \cdot e^s} + \varrho^{(s)} \qquad \left(-\frac{1}{2q \cdot e^s} < \varrho^{(s)} \leqq \frac{1}{2q \cdot e^s}\right),$$

wo $Q^{(s)}$, wie die unten folgenden $h^{(s)}\ r^{(s)}$, eine ganze Zahl bedeutet, findet man, wenn

$$\frac{Q^{(s)}}{e^s} = h^{(s)} + \frac{r^{(s)}}{e^s} \qquad (0 \leqq r^{(s)} \leqq e^s - 1)$$

gesetzt und die Annahme $\varrho^{(s)} = 1 : 2q \cdot e^s$, welche $h = h^{(s)}$ liefert, nicht weiter berücksichtigt wird:

$$(2) \quad \frac{h^{(s)}}{q} + \frac{r^{(s)} - 1}{q \cdot e^s} < \mathfrak{f}_{m^{(s)}+r} < \frac{h^{(s)}}{q} + \frac{r^{(s)} + 1}{q \cdot e^s} \leqq \frac{h^{(s)} + 1}{q}.$$

Ist $r^{(k)}$ der erste von 0 verschiedene Divisionsrest, so wird

$$\frac{h^{(k)}}{q} < \mathfrak{f}_{m^{(k)}+r} < \frac{h^{(k)} + 1}{q}$$

sein, so daſs $h^{(k)} = h$ zu setzen ist. Wollte man annehmen, daſs wie groſs auch s sei, stets $r^{(s)} = 0$ sei, so würde sich ergeben daſs

$$\lim_{n=+\infty} \mathfrak{f}_n = \frac{h^{(1)}}{q}$$

sei. Man bemerke zunächst, daſs wenn

$$r^{(s)} = r^{(s+1)} = 0$$

ist, dann auch

$$h^{(s)} = h^{(s+1)}$$

sein muſs. Schreibt man in (2) anstatt s $s+1$ und setzt in der so erhaltenen Relation $r = l$, in (2) aber

$$r = m^{(s+1)} - m^{(s)} + l,$$

so folgt unmittelbar

$$\frac{h^{(s)}}{q} - \frac{1}{qe^s} < \frac{h^{(s+1)}}{q} + \frac{1}{q \cdot e^{s+1}},$$

$$\frac{h^{(s+1)}}{q} - \frac{1}{q \cdot e^{s+1}} < \frac{h^{(s)}}{q} + \frac{1}{q \cdot e^s},$$

woraus man schliefst, dafs

$$|h^{(s+1)} - h^{(s)}| < \frac{1}{e^s} + \frac{1}{e^{s+1}} \leqq \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4},$$

also

$$h^{(s)} = h^{(s+1)}$$

sein mufs. Wenn nun

$$r^{(1)} = r^{(2)} = \ldots = 0,$$

so folgt

$$h^{(1)} = h^{(2)} = \ldots,$$

so dafs aus (2) sich ergiebt

$$\left| \mathfrak{f}_n - \frac{h^{(1)}}{q} \right| < \frac{1}{q \cdot e^s} \; (n > m^{(s)})$$

d. i.

$$\lim \mathfrak{f}_n = h^{(1)} : q.$$

Es kann die Aufgabe vorkommen, den Zähler $h^{(k)}$ wirklich zu berechnen. Sie wird durch das soeben entwickelte Verfahren nur dann mit Sicherheit gelöst, wenn man von vornherein weifs, dafs ein rationaler Grenzwerth mit dem Nenner q ausgeschlossen ist. In einem solchen Falle mufs man nach einer endlichen Anzahl von Versuchen die gewünschte Zahl $h^{(k)}$ erhalten.

Setzt man im obigen Satze $q = 1$, so erhellt, dafs in dem Falle, wo die $\mathfrak{f}_n$ nicht einen ganzzahligen Grenzwerth besitzen, immer eine ganze Zahl c_0 existiren mufs, derart dafs

$$c_0 < \mathfrak{f}_n < c_0 + 1 \qquad (n > m_0).$$

Und wenn ein rationaler Grenzwerth mit einem Nenner von der Form e^p ausgeschlossen wird, so müssen sich ganze Zahlen h_p, h_{p+1} ermitteln lassen, derart dafs

$$\frac{h_p}{e^p} < \mathfrak{f}_n < \frac{h_p + 1}{e^p} \qquad (n > m_p),$$

$$\frac{h_{p+1}}{e^{p+1}} < \mathfrak{f}_n < \frac{h_{p+1} + 1}{e^{p+1}} \qquad (n > m_{p+1}).$$

Setzt man in beiden Formeln für n einen Werth der gröfser ist als beide Zahlen m_p, m_{p+1}, so mufs man schliefsen, dafs

$$\frac{h_p}{e^p} < \frac{h_{p+1}+1}{e^{p+1}}, \qquad \frac{h_{p+1}}{e^{p+1}} < \frac{h_p+1}{e^p},$$

d. i.

$$-1 < h_{p+1} - eh_p < e$$

also

$$h_{p+1} = eh_p + c_{p+1} \qquad 0 \leqq c_{p+1} \leqq e-1$$

$$\frac{h_{p+1}}{e^{p+1}} = \frac{h_p}{e^p} + \frac{c_{p+1}}{e^{p+1}};$$

d. i.

$$\frac{h_1}{e} = c_0 + \frac{c_1}{e}, \quad \frac{h_2}{e} = c_0 + \frac{c_1}{e} + \frac{c_2}{e^2}$$

u. s. f., womit der Satz (1*) erwiesen ist.

Wir gelangen nunmehr zu folgendem Resultat. — Entweder haben die $\mathfrak{f}_n$ einen Grenzwerth von der Form

$$S_m = c_0 + \frac{c_1}{e} + \cdots + \frac{c_m}{e^m},$$

oder sie haben den Grenzwerth

$$\mathfrak{c} = \left(c_0 + \frac{c_1}{e} + \frac{c_2}{e^2} + \cdots + \frac{c_n}{e^n}\right).$$

Da nämlich auch die Relation besteht (Nr. 5)

$$S_p < \mathfrak{c} < S_p + \frac{1}{e^p},$$

so folgt nach (1*)

$$|\mathfrak{c} - \mathfrak{f}_n| < \frac{1}{e^p} \qquad \text{für } n > m_p,$$

d. i.

$$\lim \mathfrak{f}_n = c.$$

Dafs neben c nicht auch eine davon verschiedene Zahl Grenzwerth der $\mathfrak{f}_n$ sein kann, folgt unmittelbar nach dem 2. Corollar in Nr. 7.

Was wir hier über die $\mathfrak{f}_n$ erfahren haben, gilt selbstverständlich auch von den früher betrachteten φ_n, so dafs wir den Satz aufstellen können: „Jede irrationale (φ_n) läfst sich in systematischer Form darstellen; es ist $(\varphi_p) = (S_p)$." Bedeutet k_p eine ganze Zahl $> m_p$, so hat man nach (1*)

$$S_p < \varphi_{k_p} < S_p + \frac{1}{e^p}.$$

Nun ist leicht einzusehen, dafs k_p mit p unbegrenzt wächst. Denn würde k_p kleiner bleiben als eine ganze Zahl h, so hätte man nach (1*)

$$\varphi_h = \varphi_{h+r}.$$

Da aber

$$0 < \varphi_{k_p} - S_p < \frac{1}{e^p},$$

also

$$\lim\,(\varphi_{k_p} - S_p) = 0$$

bei $\lim p = +\infty$ ist, so ist nach Nr. 5

$$(\varphi_p) = (\varphi_{k_p}) = (S_p).$$

12. Unvollständige Decimalzahlen. In numerischen Rechnungen wird eine irrationale Zahl $\mathfrak{a}$ durch zwei rationale, zwischen welchen sie liegt, dargestellt. Der Unterschied derselben giebt die Unsicherheit an, die hinsichtlich $\mathfrak{a}$ noch obwaltet. Aehnliches gilt von einer rationalen Zahl, welche nicht genau bekannt ist. — Setzt man

$$\mathfrak{a} = \alpha + \mathfrak{r},$$

worin α eine gegebene rationale Zahl bezeichnet, während man bezüglich $\mathfrak{r}$ die rationalen Grenzen $\varrho\,\sigma$

$$\varrho < \mathfrak{r} < \sigma$$

kennt, so hat man

$$\alpha + \varrho < \mathfrak{a} < \alpha + \sigma;$$

es besteht somit hinsichtlich $\mathfrak{a}$ noch eine Unsicherheit, die zwar den Betrag $\sigma - \varrho$ nicht erreicht, ihm aber beliebig nahe kommt. $\mathfrak{r}$ heifst der (absolute) Fehler des Näherungswerthes α.

Gewöhnlich denkt man sich α als eine endliche Decimalzahl

$$\alpha = a_1\,10^{p+m-1} + a_2\,10^{p+m-2} + \cdots + a_{m-1}\,10^{p+1} + a_m\,10^p,$$

worin $p \gtreqless 0$ sein kann, wenn man unter 10^0 1, unter 10^p bei $p < 0$ $1 : 10^{-p}$ versteht. $\varrho\;\sigma$ werden in Theilen der Einheit 10^p der letzten hier erscheinenden Ordnung ausgedrückt. Man nimmt entweder

$$0 < \mathfrak{r} < 10^p$$

oder

$$-\tfrac{1}{2}10^p < \mathfrak{r} < \tfrac{1}{2}10^p,$$

so dafs für $\mathfrak{a}$ eine Unsicherheit bis zu dem Betrage 10^p besteht. Zumeist werden die letzteren Grenzen gebraucht. Dann enthält α, wenn

$$0 < \mathfrak{r} < \tfrac{1}{2}10^p,$$

bis zu der Ordnung 10^p einschliefslich die nämlichen Ziffern wie $\mathfrak{a}$; wenn aber

$$0 > \mathfrak{r} > -\tfrac{1}{2}10^p,$$

so ist α gleich der obenerwähnten Zahl mehr 10^p. Die Unsicherheit bezüglich $\mathfrak{a}$ sinkt auf den Betrag $\frac{1}{2}10^p$, wenn angegeben ist, ob α kleiner oder gröfser als $\mathfrak{a}$ ist. Daher deutet man durch einen unter die letzte Ziffer von α gesetzten Strich u. dgl. an, dafs α zu grofs sei. Dann besagt z. B. $\alpha' = 0 \cdot 17$, dafs der Fehler von α' zwischen 0 und 0,005; $\alpha'' = 0 \cdot 1\underline{7}$, dafs der von α'' zwischen $-0{,}005$ und 0 liegt. Will man solche Angaben auch für eine Rechnung verwerthen, so addirt man zu jeder Zahl, deren letzte Ziffer nicht unterstrichen ist, $\frac{1}{4}10^p$ und zieht von jeder, in der sie unterstrichen ist, $-\frac{1}{4}10^p$ ab. Der Fehler der so erhaltenen Näherungswerthe liegt zwischen $-\frac{1}{4}10^p$ und $\frac{1}{4}10^p$. Man würde demnach statt α' 0,1725, statt α'' 0,1675 gebrauchen.[5])

13. Die Verhältnisse stetiger relativer Gröfsen $A, B, \Gamma \ldots$ (V. 7). Unter der Voraussetzung, dafs einer Gröfse E („der Einheit") die 1, und jeder zu E commensurabelen Gröfse

$$A = \pm aM, \qquad E = bM$$

die Zahl $\pm a:b$ zugeordnet wird, bestehen die folgenden Sätze:

1.) „Jeder zu E nicht commensurabelen Gröfse B entspricht eine und nur eine irrationale Zahl $\mathfrak{b}$, welche das Verhältnifs B zu E heifst. Ist die zu E commensurabele $\alpha_1 E < B$, so ist $\alpha_1 < \mathfrak{b}$, und ist $\alpha_2 E > B$, so $\alpha_2 > \mathfrak{b}$." — B wird mit $\mathfrak{b}E$ bezeichnet, was jedoch nicht als Product aufzufassen ist.

B liegt nämlich zwischen zwei Gröfsen $c_0 E$ und $(c_0 + 1)E$, worin c_0 jede ganze Zahl sein kann. Es giebt ferner eine bestimmte Ziffer c_1 — $0 \leqq c_1 \leqq e - 1$ — so dafs

$$\left(c_0 + \frac{c_1}{e}\right) E < B < \left(c_0 + \frac{c_1 + 1}{e}\right) E.$$

U. s. f. Auf diese Art gelangt man zu einer unbegrenzten Reihe von Ziffern $c_1, c_2 \ldots$, so dafs nach den Bezeichnungen von Nr. 2

$$S_n E < B < \left(S_n + \frac{1}{e^n}\right) E,$$

wie grofs auch der Index n sein mag. Die Zahl $(S_n) = \mathfrak{b}$ wird B zugeordnet. — Bedeutet α_1 eine rationale Zahl $< \mathfrak{b}$, so ist $\alpha_1 E < B$, da es Werthe von n giebt, derart dafs $\alpha_1 < S_n$. Ist nämlich

$$0 < \varepsilon < \mathfrak{b} - \alpha_1,$$

so wird für $n > \mu$

$$\mathfrak{b} < S_n + \varepsilon,$$

also

$$S_n > \mathfrak{b} - \varepsilon > \alpha_1$$

sein. Ebenso hat man, wenn α_2 eine solche Zahl $< \mathfrak{b}$ ist,

$$\alpha_2 E > B.$$

2.) „Jeder irrationalen Zahl $(\psi_n) = \mathfrak{b}$ entspricht eine und nur eine Gröfse B, gröfser als alle Gröfsen $\alpha_1 E$ und kleiner als alle $\alpha_2 E$, wenn α_1 eine rationale Zahl $< \mathfrak{b}$, α_2 eine $> \mathfrak{b}$ bezeichnet."

Der Satz folgt aus der Stetigkeit des Gröfsensystemes. Dürfen wir keine Gröfse B annehmen, so können wir im zusammenhängenden Systeme αE einen Schnitt nachweisen, indem wir eine Gruppe bilden aus den Gröfsen $\alpha_1 E$, wo $\alpha_1 < \mathfrak{b}$, die andere aus den $\alpha_2 E$, wo $\alpha_2 > \mathfrak{b}$. Es liegen nämlich zwischen jedem α_1 und $\mathfrak{b}$, sowie zwischen jedem α_2 und $\mathfrak{b}$ noch rationale Zahlen (Nr. 5, 4).

3.) „Es sei $(\psi_n) = \mathfrak{b}$. Hat man eine Gröfse B gefunden, derart dafs zu jeder rationalen Zahl $\varepsilon > 0$ eine $\mu > 0$ gehört, so dafs für alle Werthe $n > \mu$

$$(\psi_n - \varepsilon)\, E < B < (\psi_n + \varepsilon)\, E,$$

so ist B die der Zahl $\mathfrak{b}$ entsprechende Gröfse."

Denn wenn wieder $\alpha_1 < \mathfrak{b}$, so hat man, falls ε eine positive Zahl $< \frac{1}{2}(\mathfrak{b} - \alpha_1)$ bezeichnet, bei $n > \mu$

$$\mathfrak{b} < \psi_n + \varepsilon$$

d. i.

$$\psi_n - \varepsilon > \mathfrak{b} - 2\varepsilon > \alpha_1,$$

also

$$B > \alpha_1 E.$$

Aehnlich folgt, dafs wenn wieder

$$\alpha_2 > \mathfrak{b}, \qquad B < \alpha_2 E$$

sein mufs.

Vermittelst des letzten Satzes erkennt man, dafs der Summe der Zahlen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ die Summe der diesen entsprechenden Gröfsen entspricht und umgekehrt:

$$\mathfrak{a}E + \mathfrak{b}E = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b})\, E.$$

Ferner: „Ordnet man der Gröfse $\mathfrak{a}E$ die Zahl $+1$ zu, so entspricht der Zahl $\mathfrak{b}$ die Gröfse $(\mathfrak{a}\mathfrak{b})\, E$ d. i.

$$\mathfrak{b}\,(\mathfrak{a}E) = (\mathfrak{a}\mathfrak{b})\, E."$$

Setzt man

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{m}, \qquad \mathfrak{m}E = M,$$

so folgt dafs bei der Einheit $\mathfrak{a}E = A$ der Gröfse M die Zahl

$$\mathfrak{b} = \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{a}}$$

entspricht. D. i. „das Verhältnifs $M : A$ ist gleich dem Quotienten der Verhältnisse dieser Gröfsen zu einer beliebigen dritten Gröfse E."

Zufolge der vorstehenden Bemerkungen können in allen Relationen, worin Aggregate der Gröfsen A, B, Γ ... vorkommen, diese durch ihre Verhältnisse in Bezug auf eine Gröfse E, also durch Zahlen ersetzt werden. Anstatt der Euclid'schen Verhältnisse betrachten wir nun die Quotienten von Verhältnifszahlen, wobei die schon im II. Abschnitte erwähnten Sätze auftreten.[6]) Die in VI. 4—7 vorgetragenen Sätze für die Verhältnisse im gegenwärtigen Sinne anzumerken ist ebenfalls überflüssig, da die ihnen zu Grunde liegenden algebraischen Entwickelungen sich jeder Zeit von selbst darbieten. Ist

$$\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}} = \frac{\mathfrak{c}}{\mathfrak{d}},$$

so ist z. B. auch

$$\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}} + 1 = \frac{\mathfrak{c}}{\mathfrak{d}} + 1,$$

d. h.

$$\frac{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}{\mathfrak{b}} = \frac{\mathfrak{c}+\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}}$$

(l. c. 4, 6. Satz). — Hier wollen wir nur an den folgenden, nützlichen Satz erinnern. „Es ist

$$\frac{\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{b}_1} = \frac{\mathfrak{a}_2}{\mathfrak{b}_2} = \cdots = \frac{\mathfrak{a}_n}{\mathfrak{b}_n} = \frac{\mathfrak{a}_1\mathfrak{w}_1 + \mathfrak{a}_2\mathfrak{w}_2 + \cdots + \mathfrak{a}_n\mathfrak{w}_n}{\mathfrak{b}_1\mathfrak{w}_1 + \mathfrak{b}_2\mathfrak{w}_2 + \cdots + \mathfrak{b}_n\mathfrak{w}_n},$$

wenn die $\mathfrak{w}_1$, $\mathfrak{w}_2 \ldots \mathfrak{w}_n$ beliebige von 0 verschiedene Zahlen bedeuten, nur so gewählt, daſs auch der letzte Nenner nicht 0 ist.“ Zum Beweise derselben bezeichne man den gemeinsamen Werth der Quotienten $\frac{\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{b}_1} \cdots \frac{\mathfrak{a}_n}{\mathfrak{b}_n}$ mit $\mathfrak{q}$, so daſs

$$\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{b}_1\mathfrak{q} \ldots \mathfrak{a}_n = \mathfrak{b}_n\mathfrak{q};$$

$$\mathfrak{a}_1\mathfrak{w}_1 = \mathfrak{b}_1\mathfrak{w}_1\mathfrak{q} \ldots \mathfrak{a}_n\mathfrak{w}_n = \mathfrak{b}_n\mathfrak{w}_n\mathfrak{q}$$

und addire die letzten n Gleichungen.

VIII. Abschnitt.

Potenzen, Wurzeln, Logarithmen.

1. Unter der m^{ten} Potenz einer beliebigen reellen Zahl a versteht man das Product aus m Factoren a

$$a^m = a \cdot a \ldots\ldots a \;(m\text{-mal}).$$

a heifst die Basis oder der Dignand, m der Exponent. Unter der ersten Potenz von a versteht man die Zahl a selbst ($a^1 = a$). Die zweite Potenz der Zahl a wird ihr Quadrat, die dritte ihr Cubus, die vierte ihr Biquadrat genannt. —

Insbesondere hat man

$$0^m = 0, \; (-1)^{2k} = +1, \; (-1)^{2k-1} = -1,$$

wo m, k irgend welche natürliche Zahlen bedeuten.

Aus der Definition der Potenz ergeben sich unmittelbar die folgenden Relationen

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \qquad (a^m)^n = a^{mn} \qquad a^m \cdot b^m = (ab)^m, \qquad \text{(I)}$$

worin a, b beliebige reelle, m n beliebige natürliche Zahlen bezeichnen. Man hat ferner, falls nur a nicht 0 ist,

$$a^m : a^n = \begin{cases} a^{m-n} & (m > n) \\ 1 & (m = n), \\ 1 : a^{n-m} & (m < n) \end{cases} \qquad \frac{b^m}{a^m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m. \qquad \text{(II)}$$

Die Relationen (II) können auch formal aus der ersten und dritten in (I) abgeleitet werden, was hier ein für alle Male bemerkt sei. So findet man, wenn a nicht 0 und $m > n$, aus

$$a^{m-n} \cdot a^n = a^m \qquad a^{m-n} = a^m : a^n \qquad 1 : a^{m-n} = a^n : a^m,$$

aus

$$a^m \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^m = b^m \quad \left(\frac{b}{a}\right)^m = \frac{b^m}{a^m}.$$

Wichtig ist endlich der in der folgenden Relation ausgesprochene Satz, worin a b zwei verschiedene reelle Zahlen bedeuten:

$$\frac{a^m - b^m}{a - b} = a^{m-1} + a^{m-2}b + a^{m-3}b^2 + \dots + ab^{m-2} + b^{m-1}. \tag{III}$$

Man verificirt denselben, indem man die rechte Seite mit $a - b$ multiplicirt.

2. Ungleichungen. Es seien jetzt a, b beliebige jedoch verschiedene positive, m, n beliebige natürliche Zahlen.

1) Ist $a > b$, so hat man $a^m > b^m$.

2) Ist $m > n$, so hat man simultan mit

$$a \gtrless 1 \qquad a^m \gtrless a^n.$$

3) $m(a-b)b^{m-1} < a^m - b^m < m(a-b)a^{m-1}$. $(m > 1)$.

Die Relation folgt aus (III) und zwar sowol wenn $a > b$, als auch wenn $a < b$. Setzt man hier

$$a = 1 + d \qquad b = 1,$$

sodafs $-1 < d \gtrless 0$ sein mufs, so erhält man leicht

4) $$1 + md < (1 + d)^m < \frac{1}{1 - \frac{md}{1+d}} \qquad (m > 1).$$

Der zweite Theil der Relation setzt jedoch voraus, dafs der Nenner positiv, somit $d < \frac{1}{m-1}$ sei.

3. Potenzen der Binome. Sind a, b beliebige reelle Zahlen, so ergiebt sich durch Ausführung der Multiplicationen

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

Man schliefst daraus, dafs $(a + b)^m$ ein Ausdruck von der Form

(a) $$(a + b)^m = a^m + m_1 a^{m-1}b + \dots + m_r a^{m-r}b^r + \dots + m_{m-1}ab^{m-1} + b^m$$

sein müsse, worin die Coefficienten m_1, $m_2 \dots m_{m-1}$ ganze positive Zahlen bedeuten. Wird nämlich diese Behauptung als richtig angenommen, wie sie es in der That für $m = 2, 3, 4$ ist, so trifft sie auch zu für

$$(a + b)^{m+1} = (a + b)^m \cdot (a + b).$$

In derselben Art kann man zeigen, dafs die Binomialcoefficienten m_r die folgenden Werthe haben müssen

$$\text{(b)} \qquad m_r = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-r+1)}{1.\,2\ldots.\,r}$$

d. i.

$$m_1 = m,\ m_2 = \frac{m(m-1)}{1.\,2}\ldots\ldots,\ m_m = 1.$$

In der That stimmen diese Formeln für $m = 2, 3, 4$. Es besteht aber — wenn wir unter m_0 1 verstehen — die allgemeine Formel

$$\text{(c)} \qquad m_{r-1} + m_r = (m+1)_r \qquad (r = 1, 2\ldots\ldots m),$$

wie man durch unmittelbare Einsetzung der Ausdrücke (b) erkennt. — Angenommen nun, es sei die Formel (a) nach Einsetzung der Werthe (b) für die m_r richtig, so ergiebt sich vermöge (c) durch Ausführung der Multiplication

$$(a+b)^{m+1} = (a+b)^m \cdot (a+b) = a^{m+1} + (m+1)_1 a^m b + \ldots\ldots$$
$$+ (m+1)_r a^{m+1-r} b^r + \ldots\ldots + (m+1)_m a b^m + b^{m+1}$$

d. i. es bewähren sich die Formeln (a) und (b) auch, wenn wir den Exponenten m durch $m + 1$ ersetzen. Diese Formeln gelten aber für $m = 2$, also auch für $m = 3, 4$ u. s. f., somit für jeden Exponenten m.

Bezeichnet man das Product aller natürlichen Zahlen von 1 bis n: $1 \cdot 2 \ldots . n$ mit $n!$, so folgt aus (b) noch

$$m_r = \frac{m!}{r!\,(m-r)!}$$

und somit der Satz

$$\text{(d)} \qquad m_r = m_{m-r}.$$

Die Binomialformel ändert sich also bei Vertauschung der Zahlen a und b nicht. — NB. Man gebraucht anstatt m_r auch die Bezeichnung $\binom{m}{r}$.

Wir schliefsen hieran den **polynomischen Satz** d. i. die Regel, nach welcher die Glieder der Potenz

$$(a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^m$$

angeschrieben werden können, ohne dafs die successiven Multiplicationen auszuführen sind. „Es seien $p_0, p_1 \ldots p_n$ ganze Zahlen, deren jede alle Werthe von 0 bis m annehmen kann. Der Ausdruck $(a_0 + a_1 + \ldots a_n)^m$ ist die Summe der Glieder

$$\frac{m!}{p_0!\, p_1! \ldots p_n!}\, a_0^{p_0} a_1^{p_1} \ldots\ldots a_n^{p_n},$$

die dadurch entstehen, dafs für $p_0, p_1, \ldots p_n$ alle Systeme von Werthen gesetzt werden, deren Summe m beträgt:

$$p_0 + p_1 + \ldots + p_n = m.“$$

Dabei hat man unter 0! 1 zu verstehen. — Der Satz ist für $m = 1$ richtig. Angenommen nun, er gelte für irgend einen Werth von m, so läfst sich leicht zeigen, dafs er auch für den Werth $(m + 1)$ besteht. Da

$$(a_0 + a_1 + \ldots + a_n)^{m+1} = (a_0 + a_1 + \ldots + a_n)^m (a_0 + a_1 + \ldots a_n),$$

so ergeben sich dafür nur Glieder von der vorstehenden Form, worin aber $p_0 + p_1 + \ldots + p_n = m + 1$. Jedes derselben entsteht aus den Gliedern

$$a_0^{p_0} a_1^{p_1} \ldots a_r^{p_r - 1} \ldots\ldots a_n^{p_n}$$

von $(a_0 + \ldots + a_n)^m$ durch Multiplication mit a_r, wobei r alle jene Werthe annimmt, wofür das zugehörige p_r nicht 0 ist — und nur aus diesen. Bezeichnen wir sie mit

$$p'_1, p'_2 \ldots p'_k \quad (k \leqq n),$$

so finden wir als Coefficienten des allgemeinen Gliedes von $(a_0 + \ldots + a_n)^{m+1}$ zufolge Voraussetzung

$$\frac{m!}{(p'_1 - 1)!\, p'_2! \ldots p'_k!} + \frac{m!}{p'_1!\, (p'_2 - 1)! \ldots p'_k!} + \ldots$$

$$+ \frac{m!}{p'_1!\, p'_2! \ldots (p'_k - 1)!} = \frac{m!}{p'_1!\, p'_2! \ldots p'_k!}(p'_1 + p'_2 + \ldots + p'_k)$$

$$= \frac{(m+1)!}{p'_1!\, p'_2! \ldots p'_k!};$$

so dafs in der That der dem Exponenten $(m + 1)$ zufolge der Regel entsprechende Coefficient erscheint. Die Regel gilt somit allgemein.

4. Die Wurzeln.

Satz. Die Gleichung $x^m = a$, worin m eine natürliche, a eine positive reelle Zahl bedeutet, hat stets eine und nur eine positive Auflösung, welche die absolute m^{te} Wurzel aus der Zahl a heifst: $x = \sqrt[m]{a}$.[1]) — Statt $\sqrt[2]{a}$ schreibt man $\sqrt{a}$.

Beweis. Die m^{ten} Potenzen der natürlichen Zahlen wachsen über jede endliche Zahl. Es mufs daher eine ganze Zahl $c_0 \geqq 0$ geben, derart dafs entweder $c_0{}^m = a$ oder

$$c_0{}^m < a < c_0{}^{m+1}.$$

Im ersten Falle haben wir die Lösung $x = c_0$ unserer Gleichung gefunden; im zweiten theilen wir das Intervall $(c_0, \; c_0 + 1)$ in $e \; (\geqq 2)$ gleiche Theile und bilden die m^{ten} Potenzen

$$\left(c_0 + \frac{1}{e}\right)^m, \; \left(c_0 + \frac{2}{e}\right)^m \cdots\cdots \left(c_0 + \frac{e-1}{e}\right)^m.$$

Unter denselben befindet sich entweder eine rationale Zahl $c_0 + \frac{c_1}{e}$, wofür

$$0 < c_1 \leqq e - 1 \qquad \left(c_0 + \frac{c_1}{e}\right)^m = a$$

oder es liegt a zwischen zwei von den bis jetzt gebildeten m^{ten} Potenzen

$$0 \leqq c_1 \leqq e - 1 \qquad \left(c_0 + \frac{c_1}{e}\right)^m < a < \left(c_0 + \frac{c_1 + 1}{e}\right)^m.$$

Im ersten Falle ist $x = c_0 + \frac{c_1}{e}$ eine Lösung unserer Gleichung; im zweiten theilen wir das Intervall

$$\left(c_0 + \frac{c_1}{e}, \quad c_0 + \frac{c_1 + 1}{e}\right)$$

in e gleiche Theile, wodurch sich eine der vorstehenden analoge Disjunction ergiebt. U. s. f. Das Ergebnifs des eingeschlagenen Verfahrens wird folgendes sein:

Entweder existirt eine rationale Zahl von der Form

$$x = c_0 + \frac{c_1}{e} + \ldots + \frac{c_m}{e^m},$$

welche die Gleichung $x^m = a$ befriedigt, oder man gelangt zu einer unbegrenzten Reihe von ganzen Zahlen $c_0, c_1, c_2 \ldots$, unter denen von c_1 an alle zwischen 0 und $c - 1$ liegen $(0 \leqq c_r \leqq e - 1)$, welche die Eigenschaft besitzt, daſs wie groſs auch der Zeiger n sein mag,

(e) $$S_n^m < a < \left(S_n + \frac{1}{e^n}\right)^m,$$

worin zur Abkürzung

$$c_0 + \frac{c_1}{e} + \ldots + \frac{c_n}{e^n} = S_n$$

gesetzt ist. Eben dieselbe Zahlreihe definirt eine reelle Zahl $(S_n) = c$, deren m^{te} Potenz, wie leicht zu zeigen ist, die Zahl a ist. Da nämlich

$$S_n < c < S_n + \frac{1}{e^n} \qquad S_n^m < c^m < \left(S_n + \frac{1}{e^n}\right)^m,$$

so folgt nach (e), daſs

$$S_n^m - \left(S_n + \frac{1}{e^n}\right)^m < c^m - a < \left(S_n + \frac{1}{e^n}\right)^m - S_n^m$$

d. i. nach 2. 3)

$$| c^m - a | < \left(S_n + \frac{1}{e^n}\right)^m - S_n^m < m\left(S_n + \frac{1}{e^n}\right)^{m-1} \cdot \frac{1}{e^n}.$$

Nun ist (vgl. VII. 3)

$$S_n + \frac{1}{e^n} < c_0 + 1,$$

also

$$| c^m - a | < \frac{m(c_0 + 1)^{m-1}}{e^n}.$$

Daraus erhellt, daſs $| c^m - a |$ kleiner ist als jede positive Zahl ε. Nach VII. 2 braucht man nur

$$n > \frac{m(c_0 + 1)^{m-1} - \varepsilon}{\varepsilon(e - 1)}$$

zu denken. — Somit ist zufolge VII. 7 $c^m = a$.

Dafs es nur eine Zahl $x > 0$ geben kann, wofür $x^m = a$, ist unmittelbar aus dem 1. Satze in Nr. 2 zu ersehen.

Zur genäherten Berechnung der $\sqrt[m]{a}$ ist das vorstehende Verfahren, als zu weitläufig, nicht geeignet. Man bestimmt die aufeinander folgenden Stellen derselben von der höchsten angefangen abwärts durch systematisch angelegte Versuche, wobei man sich des binomischen Satzes in Nr. 3 bedient. Erhebt man eine Zahl A, welche in die systematische Form für $e = 10$ gebracht, mit Einheiten der Ordnung 10^n ($n \gtreqless 0$ — vgl. Nr. 6) beginnt, auf die m^{te} Potenz, so fängt A^m mit Einheiten von der Ordnung mn zum mindesten, $mn + m - 1$ zum höchsten an. Umgekehrt: ist die höchste Ziffer der vorgelegten Zahl a von der Ordnung 10^p, wobei $p = mq + r$ $(0 \leq r \leq m - 1)$ sei, so beginnt $\sqrt[m]{a}$ mit Einheiten der Ordnung 10^q.

Setzt man

$$\sqrt[m]{a} = b_0 \cdot 10^q + x \quad (0 < x < 10^q),$$

so dafs

$$a = b_0^m \cdot 10^{mq} + mx \cdot b_0^{m-1} 10^{(m-1)q} + \ldots,$$

so ergiebt sich, dafs die b_0 Einheiten der höchsten Ordnung in $\sqrt[m]{a}$ nur auf die Stellen 10^{mq} bis 10^p in a Einflufs nehmen. Es wird nun durch die Betrachtung der letztgenannten Stellen allein nicht schwer sein, eine solche Ziffer b_0 zu ermitteln, dafs $(b_0 \cdot 10^q)^m \leq a < \{(b_0 + 1)\, 10^q\}^m$. Mit Hilfe der angenäherten Formel

$$x = \frac{a - b_0^m \cdot 10^{mq}}{m b_0^{m-1}\, 10^{(m-1)q}}$$

gelangt man weiter zu einer Ziffer b_1, so dafs

$$(b_0 \cdot 10^q + b_1\, 10^{q-1})^m \leq a < (b_0 \cdot 10^q + (b_1 + 1)\, 10^{q-1})^m.$$

U. s. f. Auf diese Art gelingt es, eine rationale Zahl α von beliebig vielen (k) Ziffern zu bestimmen, so dafs

$$\alpha^m \leq b < (\alpha + 10^{q-k+1})^m.$$

Die Gleichung $x^m = a$ hat, wenn m gerade ist, noch die eine negative Lösung $x = -\sqrt[m]{a}$. Die Gleichung $x^m = 0$ hat die einzige Lösung $x = 0$. Die Gleichung $x^m = -a\,(a > 0)$ hat, wenn m gerade ist, keine reelle Lösung; wenn m ungerade, die einzige reelle Lösung $x = -\sqrt[m]{a}$.

Die m^{te} Wurzel aus einer ganzen positiven Zahl, welche nicht die m^{te} Potenz einer anderen natürlichen Zahl ist, ist irrational. Denn jeder eigentliche Bruch liefert, zur m^{ten} Potenz erhoben, wieder einen eigentlichen Bruch (vgl. III. 17).

5. Sätze über die absoluten Wurzeln. — Wir verstehen im Folgenden unter den Radicanden a, b positive reelle Zahlen. Dann bestehen die folgenden Relationen, in denen m, n, p natürliche Zahlen > 1 bedeuten.

$$1)\ \sqrt[mp]{a^{np}} = \sqrt[m]{a^n} \qquad 2)\ \left(\sqrt[m]{a}\right)^n = \sqrt[m]{a^n} \qquad 3)\ \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$$

$$4)\ \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{ab} \qquad 5)\ \sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a : b}.$$

Der Beweis derselben bietet sich unmittelbar dar, wenn man auf die Bedeutung der Wurzeln zurückgeht. Um z. B. 2) zu zeigen, setze man $\sqrt[m]{a} = x$, so dafs $x^m = a$. Dann ist $a^n = x^{mn} = (x^n)^m$ also $x^n = \sqrt[m]{a^n}$.

Es gelten ferner die Ungleichungen:

1) Ist $a > b > 0$, so ist $\sqrt[m]{a} > \sqrt[m]{b}$. (Indirect nach 2. 1).)

2) Ist $m > n$ so ist simultan mit $a \gtrless 1$ $\sqrt[m]{a} \lessgtr \sqrt[n]{a}$. (Indirect nach 2. 2), indem man zur Potenz mn erhebt.)

3) Ist $1 + d > 0$, d jedoch nicht Null, so hat man

$$\frac{1}{1 - \frac{d}{m(1+d)}} < \sqrt[m]{1+d} < 1 + \frac{d}{m}.$$

Man setze in Nr. 2. 3)

$$a = \sqrt[m]{1+d} \qquad b = 1,$$

so dafs sich ergiebt

$$m\left(\sqrt[m]{1+d} - 1\right) < d < m\left(\sqrt[m]{1+d} - 1\right)\left(\sqrt[m]{1+d}\right)^{m-1}$$
$$= m(1+d)\left(1 - \frac{1}{\sqrt[m]{1+d}}\right).$$

Daraus folgt die vorstehende Relation unmittelbar, wenn man bemerkt, daſs hier stets $1 - \frac{d}{m(1+d)} > 0$ sein muſs.

Anmerkung. Man kann falls $d > 0$, für den positiven Unterschied

$$x = 1 + \frac{d}{m} - \sqrt[m]{1+d} < \frac{d}{m}$$

auch eine engere obere Grenze aufstellen, als die gerade abgeleitete Relation liefert. So hat man, wenn $m = 2$,

$$\sqrt{1+d} = 1 + \frac{d}{2} - x,$$

also durch Quadrirung

$$0 = \frac{d^2}{4} - 2x\left(1 + \frac{d}{2}\right) + x^2$$

und

$$x = \frac{\frac{1}{8}d^2}{1 + \frac{1}{2}(d - x)} < \tfrac{1}{8}d^2, \qquad \text{indem } 0 < x < \frac{d}{2}.$$

Auf dieselbe Weise folgt für $m = 3$, in welchem Falle $0 < x < \frac{d}{3}$,

$$x < \tfrac{1}{9}d^2.$$

Umständlicher gestaltet sich hier der Nachweis des allgemeinen Satzes, daſs

$$x < \frac{m-1}{2m^2}d^2.$$

Wir werden denselben im XI. Abschnitte auf eine andere Art führen und dort auch zeigen, wie der Satz zur Verbesserung der in der vorigen Nr. ermittelten Näherungswerthe A für $\sqrt[m]{a}$ benutzt werden kann.

6. Erweiterung des Potenzbegriffes auf rationale Exponenten. Man hat schon frühzeitig bemerkt, daſs von gebrochenen rationalen Zahlen abhängige Ausdrücke gebildet werden können, welche den nämlichen Relationen (I) genügen, wie die Potenzen. Um die Entwickelung derselben systematisch vorzunehmen, legen wir uns die Aufgabe vor, einen von einer beliebigen reellen Zahl x abhängigen Ausdruck $f(x)$ aufzusuchen, welcher zunächst wenigstens die erste dieser Relationen d. i.

(1) $$f(x) \cdot f(y) = f(x + y)$$

befriedigt. Hieraus folgt, wenn wir $y = 0$ setzen: $f(0) = 1$, indem die nichtssagende Annahme $f(x) = 0$ bei beliebigem x

ausgeschlossen wird. Durch successive Anwendung der Formel (1) ergiebt sich

$$f(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = f(x_1) \cdot f(x_2) \ldots f(x_n);$$

somit, wenn $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = x$ gesetzt wird,

$$(2) \qquad f(nx) = [f(x)]^n;$$

insbesondere also

$$f(n) = [f(1)]^n, \qquad f(1) = \left[f\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n.$$

Soll nun $f\left(\frac{1}{n}\right)$ eine reelle Zahl sein bei jedem Werthe von n, so braucht $f(1)$ nur eine positive Zahl zu sein, die wir mit a bezeichnen wollen. Wir finden somit neben

$$(3) \qquad f(1) = a; \quad f(n) = a^n, \quad f\left(\frac{1}{n}\right) = \sqrt[n]{a}.$$

Setzt man in (2) statt n eine andere positive ganze Zahl m und hierauf $x = \frac{1}{n}$, so folgt

$$(4) \qquad f\left(\frac{m}{n}\right) = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m.$$

Endlich schliefst man aus (1), wenn man $y = -x$ annimmt:

$$(5) \qquad f(-x) = f(0) : f(x) = \frac{1}{f(x)}, \qquad f(-n) = \frac{1}{a^n}.$$

Die in den Formeln (3) — (5) auf der rechten Seite befindlichen Ausdrücke kann man in der That als abhängig vom Exponenten $\pm \frac{m}{n}$ bezeichnen, da zufolge ihrer Definition

$$f\left(\frac{\pm mk}{nk}\right) = f\left(\frac{\pm m}{n}\right),$$

was auch die ganze positive Zahl k sein mag. Wir verstehen somit unter $a^{\frac{m}{n}}$ die m^{te} Potenz der absoluten n^{ten} Wurzel aus a, unter a^0 1, endlich unter $a^{-\mu}$, wo μ eine beliebige positive rationale Zahl sein kann, den reciproken Werth von a^μ d. i. $1 : a^\mu$. Dabei bezeichnet a irgend eine positive Zahl. Man kann auch setzen $a^{\frac{p}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^p$, was auch p für eine ganze Zahl sein mag, während n eine positive ganze Zahl bedeutet. — Es soll ferner sein $0^\mu = 0$ $(\mu > 0)$.

Es läfst sich nun leicht nachweisen, dafs die genannten Ausdrücke wirklich der Relation (1) d. i.

$$(6) \qquad a^\mu \cdot a^\nu = a^{\mu+\nu}$$

und auch den übrigen in (I) verzeichneten Relationen

$$(7) \qquad (a^\mu)^\nu = a^{\mu\nu} \qquad (ab)^\mu = a^\mu \cdot b^\mu$$

Genüge leisten, so dafs in denselben jetzt μ, ν irgend welche rationale Zahlen sein können. Man nehme zuerst an, es seien μ, ν beide positiv, also

$$\mu = \frac{m}{n} \qquad \nu = \frac{p}{q}.$$

Dann hat man

$$a^\mu = \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nq]{a^{mq}} \qquad a^\nu = \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{np}},$$

somit

$$a^\mu \cdot a^\nu = \sqrt[nq]{a^{mq+np}} = a^{\frac{mq+np}{nq}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}} = a^{\mu+\nu}.$$

Man findet ferner

$$(a^\mu)^\nu = \sqrt[q]{(a^\mu)^p} = \sqrt[q]{\left(\sqrt[n]{a}\right)^{mp}} = \sqrt[nq]{a^{mp}} = a^{\frac{mp}{nq}} = a^{\mu\nu}.$$

U. s. f. Sind die Gleichungen (6) (7) für positive rationale Exponenten erwiesen, so hat es keine Schwierigkeit, ihre Giltigkeit für beliebige rationale zu zeigen. Man hat dabei folgende Fälle zu unterscheiden: 1) es sei einer der Exponenten μ, ν Null, 2) $\mu > 0$ $\nu < 0$, 3) $\mu < 0$, $\nu > 0$, 4) $\mu < 0$, $\nu < 0$. So findet man z. B. im letzten Falle

$$a^\mu \cdot a^\nu = \frac{1}{a^{-\mu}} \cdot \frac{1}{a^{-\nu}} = \frac{1}{a^{-(\mu+\nu)}} = a^{\mu+\nu}$$

$$(a^\mu)^\nu = \left(\frac{1}{a^{-\mu}}\right)^\nu = (a^{-\mu})^{-\nu} = a^{\mu\nu} \qquad \text{u. s. f.}$$

7. Ungleichungen für Potenzen mit rationalen Exponenten. a) Für positive rationale Exponenten. Es seien a, b beliebige positive Zahlen.

1) Ist $a > b$, so ist $a^\mu > b^\mu$.

2) Ist $\mu > \nu > 0$, so ist **simultan** mit $a \gtrless 1$ $a^\mu \gtrless a^\nu$.

3) α. „Ist $1 + d > 0$, $(d \gtrless 0)$ so hat man

$$(8) \qquad 1 + \frac{\mu d}{1 + d} < (1 + d)^\mu < \frac{1}{1 - \mu d}.$$

Der zweite Theil der Relation ist nur richtig, wenn $d < \frac{1}{\mu}$.

Es sei $\mu = \frac{m}{n}$. Nach Nr. 5 hat man

$$(9) \qquad \frac{1}{1 - \frac{d}{n(1 + d)}} < \sqrt[n]{1 + d} < 1 + \frac{d}{n}$$

und da wegen $1 - \omega^2 < 1$ $1 \pm \omega < 1 : (1 \mp \omega)$, so lange $1 \mp \omega > 0$, auch

$$1 + \frac{d}{n(1 + d)} < \sqrt[n]{1 + d} < \frac{1}{1 - \frac{d}{n}}.$$

Dabei mufs $d < n$ sein. Erhebt man zur m^{ten} Potenz, aber unter der Voraussetzung, dafs $1 + \frac{d}{n(1 + d)} > 0$ sei, so folgt

$$\left\{1 + \frac{d}{n(1 + d)}\right\}^m < (1 + d)^\mu < \frac{1}{\left(1 - \frac{d}{n}\right)^m},$$

woraus wegen $(1 + d_1)^m > 1 + md_1$ sofort Formel (8) gewonnen wird. Der erste Theil derselben ist, falls

$$1 + \frac{d}{n(1 + d)} < 0,$$

selbstverständlich, da auch $1 + \frac{\mu d}{1 + d} < 0$.

β. Es ist von Interesse neben (8) noch eine andere Relation kennen zu lernen, in der die $(1 + d)^\mu$ einschliefsenden Grenzen **näher** an diese Zahl herantreten. Die Formel (9) ist ein specieller Fall davon.

„Man hat **simultan** mit $\mu \lesseqgtr 1$

$$(10) \qquad \frac{1}{1 - \frac{\mu d}{1 + d}} \lesseqgtr (1 + d)^\mu \lesseqgtr 1 + \mu d.$$

Dabei mufs, wenn $\mu > 1$, im ersten Theile der Relation $d < \frac{1}{\mu - 1}$ sein.“

Wenn $\mu > 1$, so hat man nach (8)

$$\begin{aligned}(11)\qquad (1+d)^{\mu} &= (1+d)(1+d)^{\mu-1} > (1+d)\left(1+\frac{(\mu-1)d}{1+d}\right)\\ &= 1+\mu d.\end{aligned}$$

Und ebenso

$$(1+d)^{\mu} < \frac{1+d}{1-(\mu-1)d} = \frac{1}{1-\frac{\mu d}{1+d}},$$

wenn nur der Nenner positiv ist.

Wenn $\mu < 1$, so folgt aus (11), da $\frac{1}{\mu} > 1$,

$$(12)\qquad (1+\mu d)^{\frac{1}{\mu}} > 1+d \quad \text{also} \quad 1+\mu d > (1+d)^{\mu}.$$

Setzt man endlich

$$1+d = \frac{1}{1-\frac{d}{1+d}},$$

so erhält man aus (12)

$$(1+d)^{\mu} > \frac{1}{1-\frac{\mu d}{1+d}},$$

da der Nenner positiv ist.

b) Für negative rationale Exponenten. Die hierauf bezüglichen Formeln folgen unmittelbar aus den in a).

1) Ist

$$a > b > 0 \qquad \mu < 0$$

so ist $a^{\mu} < b^{\mu}$.

2) Sind μ, ν beliebige rationale Zahlen und $\mu > \nu$, so ist simultan mit $a \gtrless 1$

$$a^{\mu} \gtrless a^{\nu}.$$

Denn es ist $a^{\mu-\nu} \gtrless 1$, da $\mu - \nu > 0$.

3) Unmittelbar aus (8) und (10) folgen für $\mu < 0$, $1+d > 0$, $d \gtrless 0$

$$\alpha)\qquad 1+\mu d < (1+d)^{\mu} < \frac{1}{1-\frac{\mu d}{1+d}}.$$

Der zweite Theil der Relation ist nur richtig, falls

$$d > \frac{1}{\mu - 1}.$$

β) Simultan mit $0 > \mu \gtrless -1$ hat man die genaueren Formeln

$$\frac{1}{1-\mu d} \gtrless (1+d)^{\mu} \gtrless 1 + \frac{\mu d}{1+d}.$$

Der erste Theil der Relation ist für $\mu < -1$ nur richtig, wenn

$$d > \frac{1}{\mu}.$$

8. Potenzen mit irrationalen Exponenten.

1. Satz. „Ist eine irrationale Zahl $\mathfrak{m} = (\varphi_n)$ vorgelegt, wo die Reihe $\varphi_0, \varphi_1 \ldots$ aus rationalen Zahlen besteht, und a eine beliebige positive Zahl, so existirt für die Potenz a^{φ_n} ein positiver Grenzwerth bei $\lim n = +\infty$. Und wenn auch $(\psi_n) = \mathfrak{m}$, so hat a^{ψ_n} bei $\lim n = +\infty$ denselben Grenzwerth. Diesen bei allen Darstellungen der irrationalen Zahl $\mathfrak{m} = (\varphi_n)$ sich ergebenden Grenzwerth bezeichnet man mit $a^{\mathfrak{m}}$. — Wenn $\mathfrak{m} > 0$, so findet man ebenso $0^{\mathfrak{m}} = 0$.“

Beweis. Zufolge Annahme erfüllen die φ_n folgende Bedingung. Zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ gehört eine Zahl $\mu > 0$, derart daſs

$$|\varphi_{n+r} - \varphi_n| < \varepsilon \qquad n > \mu \qquad (r = 1, 2 \ldots).$$

Setzt man $a^{\varphi_n} = \Phi_n$, so ist zu untersuchen nach VII. 11

$$\Phi_{n+r} - \Phi_n = a^{\varphi_{n+r}} - a^{\varphi_n} = a^{\varphi}\{a^{\xi} - 1\}$$

worin

$$\xi = \varphi_{n+r} - \varphi_n.$$

Es sei zunächst $a > 1$, sodaſs wenn $a = 1 + d$ gesetzt wird, $d > 0$. Nach Nr. 7 hat man mit $\xi \gtrless 0$

$$0 \lesseqgtr (1+d)^{\xi} - 1 \lesseqgtr \xi d,$$

wobei die positiven Werthe von ξ jedoch die Grenze 1 nicht erreichen dürfen. Es ist demnach

$$|(1+d)^{\xi} - 1| < d|\xi|.$$

Nach VII. 4 giebt es von 0 verschiedene rationale Zahlen $\varrho\,\sigma$, derart, daſs wenn nur n über einer bestimmten Zahl liegt — wir können sagen $n > \mu$ — $\sigma < \varphi_n < \varrho$, somit $a^{\varphi_n} < a^\varrho$. Man findet demnach, dafs

$$|\Phi_{n+r} - \Phi_n| < a^\varrho d |\xi|$$

somit kleiner als eine gegebene Zahl $\varepsilon' > 0$, falls man

$$|\xi| < \varepsilon' : a^\varrho d$$

nimmt. Es gehört also zu jeder Zahl $\varepsilon' > 0$ eine Zahl $\mu' > 0$, derart dafs

$$|\Phi_{n+r} - \Phi_n| < \varepsilon' \text{ für } n > \mu' \quad (r = 1, 2 \ldots)$$

d. h. die Φ_n nähern sich bei unbegrenzt wachsendem n einem endlichen Grenzwerthe. Dafs er positiv und nicht etwa 0 ist, folgt daraus, dafs

$$\Phi_n > a^\sigma \text{ für } n > \mu.$$

Ist auch $(\psi_n) = \mathfrak{m}$ und $a^{\psi_n} = \Psi_n$ so findet man durch ähnliche Entwickelung $(\Phi_n) = (\Psi_n)$. Man braucht nur anzusetzen

$$\Psi_n - \Phi_n = a^{\psi_n} - a^{\varphi_n} = a^{\varphi_n}(a^{\psi_n - \varphi_n} - 1)$$

und zu bemerken, dafs für $n > \mu$

$$|\Psi_n - \Phi_n| < a^\varrho d\, |\psi_n - \varphi_n|,$$

worin nach VII. 4

$$|\psi_n - \varphi_n| < \varepsilon.$$

Wenn $a < 1$ ist, so beachte man, dafs

$$a^{\varphi_n} = \left(\frac{1}{a}\right)^{-\varphi_n}.$$

Der auf der rechten Seite stehende Ausdruck gehört zu den soeben betrachteten.

Es folgt weiter:

„Ist $\mathfrak{m} > 0$ so ist $a^\mathfrak{m} \gtrless 1$ simultan mit $a \gtrless 1$; ist $\mathfrak{m} < 0$, so ist simultan mit $a \gtrless 1$

$$a^\mathfrak{m} \lessgtr 1.“$$

Denn wenn $\mathfrak{m} > 0$, so ist die oben eingeführte Zahl $\sigma > 0$, somit neben $a > 1$

$$\Phi_n > a^\sigma > 1,$$

also

$$(\Phi_n) > 1.$$

U. s. f.

Man hat noch hervorzuheben den

2. Satz. „Wenn die Zahlen $\varphi_0, \varphi_1 \ldots \varphi_n \ldots$ einen rationalen Grenzwerth α besitzen, so haben auch die a^{φ_n} einen Grenzwerth bei $\lim n = +\infty$ und zwar ist

$$(a^{\varphi_n}) = a^\alpha.“$$

Z. B. ist

$$\lim_{n=+\infty} \varphi_n = 0,$$

so ist

$$\lim_{n=+\infty} a^{\varphi_n} = 1.$$

Aus der Gleichung

$$a^\alpha - a^{\varphi_n} = a^{\varphi_n}(a^{\alpha - \varphi_n} - 1)$$

folgt der Satz durch die im Vorstehenden angewandten Schlüsse.

Die Bezeichnung $a^{\mathfrak{m}}$ für $\lim a^{\varphi_n}$ ist völlig gerechtfertigt, denn es übernimmt diese Zahl durchaus die Rolle der bisher definirten Potenzen. Denn es gelten für beliebige reelle Exponenten die Sätze:

1.) $$a^{\mathfrak{m}} \cdot a^{\mathfrak{n}} = a^{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}}. \tag{13}$$

Beim Beweise unterscheide man, ob einer oder keiner der Exponenten $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ rational ist. Im letzteren Falle hat man $\mathfrak{m} = (\varphi_n)$, $\mathfrak{m} = (\psi_n)$,

$$a^{\mathfrak{m}} = \lim a^{\varphi_n}, \qquad a^{\mathfrak{n}} = \lim a^{\psi_n} \quad (\lim n = +\infty),$$

also nach VII. Note 4)

$$a^{\mathfrak{m}} \cdot a^{\mathfrak{n}} = \lim a^{\varphi_n} \cdot a^{\psi_n} = \lim a^{\varphi_n + \psi_n}.$$

Andererseits ist

$$(\varphi_n) + (\psi_n) = (\varphi_n + \psi_n)$$

und daher

$$\lim a^{\varphi_n + \psi_n} = a^{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}}.$$

(Für $\mathfrak{n} = -\mathfrak{m}$ finden wir daher, dafs auch hier

$$a^{-\mathfrak{m}} = 1 : a^{\mathfrak{m}}.)$$

Ist $\mathfrak{m}$ irrational, $\mathfrak{n}$ rational und $= \nu$, so folgt bei $\lim n = +\infty$

$$a^{\mathfrak{m}} \cdot a^{\nu} = \lim a^{\varphi_n} \cdot a^{\nu} = \lim a^{\varphi_n + \nu} = a^{\mathfrak{m} + \nu}.$$

2.) $$a^{\mathfrak{m}} \cdot b^{\mathfrak{m}} = (ab)^{\mathfrak{m}},$$

wo auch $b > 0$ sein soll. Wird ähnlich wie (13) gezeigt.

3.) $$(a^{\mathfrak{m}})^{\mathfrak{n}} = a^{\mathfrak{m}\mathfrak{n}}.$$

Beweis. Es sei $\mathfrak{n}$ zunächst rational und zwar $= \frac{p}{q}$ worin q eine positive, p eine beliebige ganze Zahl bedeutet. Setzt man

$$(a^{\mathfrak{m}})^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(a^{\mathfrak{m}})^p} = \sqrt[q]{a^{\mathfrak{m}p}} = y,$$

so ist

$$y^q = a^{\mathfrak{m}p}.$$

Ebenso folgt aus

$$z = a^{\frac{\mathfrak{m}p}{q}} \qquad z^q = a^{\mathfrak{m}p}.$$

Daher ist $y = z$ (Nr. 4) oder

$$(a^{\mathfrak{m}})^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{\mathfrak{m}p}{q}}.$$

Ist nun auch $\mathfrak{n}$ irrational und zwar $= (\psi_n)$, so hat man

$$(a^{\mathfrak{m}})^{\mathfrak{n}} = \lim_{n=+\infty} (a^{\mathfrak{m}})^{\psi_n} = \lim_{n=+\infty} a^{\mathfrak{m}\psi_n}$$

nach dem soeben erwiesenen Satze. Und da

$$(\mathfrak{m}\psi_n) = \mathfrak{m}\mathfrak{n},$$

so ergiebt sich endlich

$$(a^{\mathfrak{m}})^{\mathfrak{n}} = a^{\mathfrak{m}\mathfrak{n}}.$$

Auch die Ungleichungen in Nr. 7 behalten Giltigkeit, wenn die darin vorkommenden Exponenten μ, ν reelle Zahlen überhaupt bedeuten, und zwar in a) positive, in b) negative oder auch beliebige reelle Zahlen. Einer näheren Ausführung wird nur der Beweis von (8) d. i. der Relation

$$1 + d > 0 \qquad d \gtrless 0$$

$$(14) \qquad (\mathfrak{m} > 0) \quad 1 + \frac{\mathfrak{m}d}{1+d} < (1+d)^{\mathfrak{m}} < \frac{1}{1-\mathfrak{m}d}$$

bedürfen, da (10) und b) 3) daraus durch Schlüsse abgeleitet sind, die von der Natur des Exponenten μ unabhängig sind. Der zweite Theil von (14) ist jedoch nur richtig, wenn

$$1 - \mathfrak{m}d > 0.$$

Es sei wieder $\mathfrak{m} = (\varphi_n)$. Man hat nun, da für $n > \mu$

$$\varphi_n > \varrho > 0,$$

nach (8)

$$1 + \frac{\varphi_n d}{1+d} < (1+d)^{\varphi_n} < \frac{1}{1-\varphi_n d};$$

daraus folgt aber nach dem 3. Corollar in VII. 5 (vgl. dazu Note 4) nur

$$(15) \qquad 1 + \frac{\mathfrak{m}d}{1+d} \leqq (1+d)^{\mathfrak{m}} \leqq \frac{1}{1-\mathfrak{m}d}.$$

Man weifs nun nach (10), dafs wenn $\mathfrak{m} < 1$, somit auch φ_n schliefslich < 1 ist,

$$\frac{1}{1 - \frac{\varphi_n d}{1+d}} < (1+d)^{\varphi_n} < 1 + \varphi_n d.$$

Somit ergiebt sich

$$\frac{1}{1-\varphi_n d} - (1+d)^{\varphi_n} > \frac{1}{1-\varphi_n d} - (1 + \varphi_n d)$$

$$= \frac{\varphi_n^2 d^2}{1-\varphi_n d} > \frac{\mathfrak{m}'^2 d^2}{1-\mathfrak{m}'d},$$

$$(1+d)^{\varphi_n} - \left(1 + \frac{\varphi_n d}{1+d}\right) > \frac{1}{1 - \frac{\varphi_n d}{1+d}} - \left(1 + \frac{\varphi_n d}{1+d}\right)$$

$$= \frac{\varphi_n^2 d^2}{(1+d)\,[1 + (1-\varphi_n)d]},$$

also

$$> \frac{\mathfrak{m}'^2 d^2}{(1+d)\,[1 + (1-\mathfrak{m}')d]},$$

wenn $0 < \mathfrak{m}' < \mathfrak{m}$ und $d > 0$. [Für $d < 0$ müfste in den Nennern der letzten Glieder statt φ_n eine Zahl $\mathfrak{m}'' > \mathfrak{m}$ gesetzt werden.] Daraus ist nun ersichtlich, dafs in (15) die unteren Zeichen (=) unmöglich sind. — Wenn $\mathfrak{m} > 1$, also schliefslich $\varphi_n > 1$, ergiebt sich mit Benutzung von (10)

$$\frac{1}{1-\varphi_n d} - (1+d)^{\varphi_n} > \frac{1}{1-\varphi_n d} - \frac{1}{1-\frac{\varphi_n d}{1+d}}$$

$$= \frac{\varphi_n d^2}{(1-\varphi_n d)\,[1+(1-\varphi_n)\,d]},$$

$$(1+d)^{\varphi_n} - \left(1+\frac{\varphi_n d}{1+d}\right) > 1 + \varphi_n d - \left(1+\frac{\varphi_n d}{1+d}\right)$$

$$= \frac{\varphi_n d^2}{1+d},$$

woraus man denselben Schlufs wie oben ableiten kann. Vorher ist jedoch noch zu bemerken, dafs in des ersteren Formel $1 - d(\varphi_n - 1)$ stets positiv ist. Dies versteht sich von selbst, wenn $d < 0$; ist aber $d > 0$, so hat man

$$1 - d(\varphi_n - 1) > 1 - \varphi_n d,$$

was in der genannten Formel immer als positiv anzusehen ist.

9. Die Logarithmen.

Satz. „Wenn a und b positive Zahlen bedeuten, die erstere von 1 verschieden, so giebt es stets eine und nur eine Zahl x, welche der Gleichung $a^x = b$ genügt.

Beweis. Es sei zuerst $a > 1$. Dann wächst a^x zugleich mit x und zwar über jede endliche Zahl, denn nach der vorigen Nummer ist

$$a^x > 1 + x(a-1)$$

für $x > 1$. Daraus folgt, dafs es eine ganze Zahl c_0 geben mufs, derart, dafs entweder $a^{c_0} = b$ oder

$$a^{c_0} < b < a^{c_0+1}.$$

Im ersten Falle ist $x = c_0$ eine Auflösung der Gleichung $a^x = b$. Im zweiten Falle bilde man, unter e eine positive ganze Zahl $\geqq 2$ verstanden, die Potenzen

$$a^{c_0+\frac{1}{e}}, \quad a^{c_0+\frac{2}{e}} \ldots a^{c_0+\frac{e-1}{e}}.$$

Sodann ergiebt sich, dafs eine ganze Zahl c_1

$$0 \leqq c_1 \leqq e-1$$

existiren mufs, derart dafs entweder

$$a^{c_0+\frac{c_1}{e}} = b$$

oder

$$a^{c_0+\frac{c_1}{e}} < b < a^{c_0+\frac{c_1+1}{e}}.$$

Im ersten Falle ist eine Auflösung, nämlich

$$x = c_0 + \frac{c_1}{e},$$

unserer Gleichung gefunden. Im zweiten theilen wir das Intervall $\frac{1}{e}$ neuerdings in e gleiche Theile, wodurch eine ähnliche Disjunction zu Tage tritt. U. s. f. Das Ergebnifs dieser Betrachtung wird folgendes sein. Entweder existirt eine rationale Zahl von der bestimmten Form

$$x = c_0 + \frac{c_1}{e} + \frac{c_2}{e^2} + \cdots + \frac{c_m}{e^m},$$

welche die Gleichung $a^x = b$ befriedigt, oder wir erhalten eine unbegrenzte Reihe von ganzen Zahlen $c_0, c_1, c_2 \ldots$, worin von c_1 an alle Ziffern sind, d. i. zwischen 0 und $e-1$ liegen, von der Eigenschaft, dafs, wie grofs auch der Zeiger n sein mag, stets

$$a^{S_n} < b < a^{S_n+\frac{1}{e^n}}.$$

Dabei ist

$$S_n = c_0 + \frac{c_1}{e} + \frac{c_2}{e^2} + \cdots + \frac{c_n}{e^n}.$$

Und es ist leicht zu zeigen, dafs für die Zahl

$$x = (S_n) \qquad a^x = b$$

ist. Da jetzt

$$S_n < x < S_n + \frac{1}{e^n},$$

also

$$a^{s_n} < a^x < a^{s_n + \frac{1}{e^n}},$$

so hat man

$$|a^x - b| < a^{s_n + \frac{1}{e^n}} - a^{s_n} = a^{s_n}\left(a^{\frac{1}{e^n}} - 1\right),$$

also

$$|a^x - b| < b\,(a-1)\,\frac{1}{e^n};$$

somit ist $|a^x - b|$ kleiner als jede positive Zahl ε d. i.

$$a^x = b.$$

Dafs es nur eine Zahl x geben kann, wofür $a^x = b$, folgt daraus, dafs für $x' \gtreqless x$ simultan $a^{x'} \gtreqless a^x$. — x ist positiv, wenn $b > 1$; negativ, wenn $b < 1$. Die Gleichung $a^x = 1$ hat nur die Lösung $x = 0$.

Ist $0 < a < 1$, so ist $\frac{1}{a} > 1$, also existirt eine und nur eine Zahl x_1, derart, dafs

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{x_1} = b,$$

somit

$$a^{-x_1} = b.$$

Man hat also für $x = -x_1$

$$a^x = b.$$

Man nennt die der Gleichung $a^x = b$ genügende Zahl x den Logarithmus der positiven Zahl b in Beziehung auf die Basis a:

$$x = {}^a\log b.$$

Hierbei reicht es jedoch aus, der Basis einen bestimmten positiven, von 1 verschiedenen Werth B zu ertheilen. Denn hat man die Zahlen ${}^B\log a$, ${}^B\log b$ ermittelt, so folgt aus

(a) $\quad b = a^x = \mathrm{B}^{x\,{}^B\log a} \quad x\,{}^B\log a = {}^B\log b \quad x = \dfrac{{}^B\log b}{{}^B\log a}.$

Für B sind gegenwärtig nur zwei Annahmen üblich. Entweder setzt man $B = 10$ als der Basis des dekadischen Zahlensystemes oder nimmt für B die in VII. 5 eingeführte irrationale Zahl e, die mit den Stellen 2,7182818284 beginnt. Die zur Basis 10 gehörigen Logarithmen heifsen gemeine oder nach ihrem ersten Berechner Briggische Logarithmen; die zur Basis e gehörigen natürliche oder Neperische[2]) Logarithmen. Wir gebrauchen für die ersteren die Abkürzung log, für die letzteren l, so dafs

$$10^{\log b} = b \qquad e^{lb} = b.$$

Aus (a) folgt

$$x = {}^{a}\log b = \frac{lb}{la} = Mlb,$$

worin die Constante $M = 1 : la$ als Modulus des zur Basis a gehörigen Logarithmensystemes bezeichnet wird. Man hat also

$$e^{\frac{1}{M}} = a,$$

oder

$$e = a^M,$$

somit auch

$$M = {}^{a}\log e.$$

Wenn die Basis eines Logarithmensystemes > 1 ist, wie wir stets annehmen, so ist sein Modulus positiv.

Wenn die Decimalzahl b nicht eine ganze Potenz von 10 ist, so besteht ihr gemeiner Logarithmus aus der ganzen Zahl c_0 — der Charakteristik — und einem positiven echten Decimalbruche, Mantisse genannt. Ist $b > 1$, so ist c_0 gleich der um 1 verminderten Anzahl der Ziffern vor dem Komma; ist $b < 1$, der Anzahl der Nullen vor der ersten geltenden Ziffer. Die gemeinen Logarithmen der natürlichen Zahlen, welche nicht Potenzen von 10 sind, sind irrational, da jede gebrochene Potenz von 10 irrational ist.

Briggs berechnete die gemeinen Logarithmen der natürlichen Zahlen b nach dem oben angegebenen Verfahren, $a = 10 \quad e = 2$ gesetzt. Hierbei kommt man mit successiven Ausziehungen von Quadratwurzeln aus:

$$\sqrt{10} = w_1, \qquad \sqrt{w_1}\ \sqrt{10 w_1},$$

u. s. f.[3]) Einfacher gestaltet sich die Arbeit, wenn man zunächst durch fortgesetztes Ausziehen der Quadratwurzel

$$\sqrt{10}, \quad \sqrt[4]{10}, \quad \sqrt[8]{10} \ldots$$

berechnet und b auf das Intervall (0,10) einschränkend, vermittelst aufeinander folgender Divisionen die Ziffern c_1, $c_2 \ldots$ bestimmt. Ist z. B. $\sqrt{10} < b < 10$, also $c_1 = 1$, so dividire man b durch $\sqrt{10}$. Je nachdem der Quotient kleiner oder gröſser als $\sqrt[4]{10}$, hat man $c_2 = 0$ oder 1 u. s. f. — Schneller kommt man vorwärts mittelst einer Tafel der Potenzen von 10 zu den Exponenten

$$\frac{1}{10^n}, \quad \frac{2}{10^n}, \ldots \frac{9}{10^n} \, (n = 1, 2 \ldots).$$ [4]

10. Allgemeine Eigenschaften der Logarithmen.

1) Der Logarithmus eines Productes ist gleich der Summe der Logarithmen der Factoren.

Ist

$$P = b_1 b_2 \ldots b_p$$

und

$$B^{x_r} = b_r \qquad (r = 1, 2 \ldots p),$$

so hat man

$$x_r = {}^B\!\log b_r$$

und

$$P = B^{x_1 + x_2 + \cdots + x_p},$$

somit

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_p = {}^B\!\log P.$$

2) Der Logarithmus eines Quotienten ist gleich der Differenz: Logarithmus des Zählers weniger Logarithmus des Nenners.

Ist

$$P = b : c, \qquad B^x = b, \qquad B^y = c,$$

so folgt

$$P = B^{x-y} \qquad {}^B\!\log P = x - y = {}^B\!\log b - {}^B\!\log c.$$

3) Der Logarithmus einer Potenz ist gleich dem Producte des Logarithmus der Basis mit dem Exponenten.

Für $P = b^c$ folgt $P = B^{xc}$, also

$$^B\!\log P = xc = c \cdot {}^B\!\log b.$$

4) Zur gröſseren von zwei positiven Zahlen ge-

hört der gröſsere Logarithmus, wenn die Basis $B > 1$. — Ist $b > c > 0$, so hat man

$$^{B}\log b > {}^{B}\log c\,;$$

denn wäre

$$^{B}\log b \leqq {}^{B}\log c,$$

so würde, da $B > 1$, folgen

$$b \leqq c.$$

IX. Abschnitt.

Die reellen Veränderlichen und ihre Functionen.

1. Unter einer reellen Veränderlichen versteht man eine Zahl, die unbegrenzt viele reelle Werthe annehmen kann, deren jeder völlig bestimmt sein mufs. Die Gesammtheit dieser Werthe heifst der Bereich der Veränderlichen.

Hierbei sind zunächst nur zwei Fälle denkbar. Entweder liegen, algebraisch gesprochen, sämmtliche Werthe der Veränderlichen (d. i. jeder einzelne derselben) unter einer bestimmten Zahl, oder die Veränderliche nimmt Werthe an, gröfser als jede gegebene positive Zahl. Im letzteren Falle sagt man, die Veränderliche habe die obere Grenze oder den Grenzwerth $+\infty$ (unendlich) oder sie wird unendlich; denn einen gröfsten Werth giebt es für sie nicht. Aber auch im ersten Falle mufs man sich hüten zu glauben, dafs die Veränderliche einen gröfsten Werth annehmen müsse. So giebt es z. B. unter den echten Brüchen $1-\frac{1}{n}$, worin n jede natürliche Zahl $(1, 2 \ldots)$ sein kann, keinen gröfsten. In jedem solchen Falle läfst sich zunächst nur Folgendes behaupten.

Satz. Liegen sämmtliche Werthe einer Veränderlichen x unter einer endlichen Zahl A, so giebt es eine und nur eine Zahl g von der Eigenschaft, dafs keiner der Werthe x sie überschreitet, dafs aber mindestens ein Werth von x vorhanden ist, dessen Unterschied von g weniger beträgt, als eine gegebene, sonst beliebige positive Zahl ε.[1]) g heifst die obere Grenze der Veränderlichen x.

Beweis. Es sei x_0 ein bestimmter Werth von x. Dann giebt es zwei ganze Zahlen p, q, so daſs

$$p \leqq x_0 < A \leqq q.$$

Betrachtet man die Intervalle

$$(p, p+1), \ (p+1, p+2) \ldots (q-1, q),$$

so muſs eines von ihnen das letzte sein, welches überhaupt noch Werthe von x enthält, und zwar in dem Sinne, daſs seine obere Grenze keinesfalls von einem Werthe der Veränderlichen x gebildet ist. Dasselbe sei mit (c_0, c_0+1) bezeichnet. Ist c_0 der einzige Werth von x_1 der darin vorkommt, so ist c_0 der gröſste Werth, den x überhaupt annehmen kann, so daſs man $g = c_0$ setzen kann. Kommen aber innerhalb des Intervalles (c_0, c_0+1) Werthe von x vor, so theile man dasselbe in e gleiche Theile $(e \geqq 2)$

$$\left(c_0, c_0 + \frac{1}{e}\right), \left(c_0 + \frac{1}{e}, c_0 + \frac{2}{e}\right) \ldots \left(c_0 + \frac{e-1}{e}, c_0 + 1\right),$$

worauf man denselben Schluſs wiederholen kann. Es giebt ein letztes Intervall

$$\left(c_0 + \frac{c_1}{e}, \ c_0 + \frac{c_1+1}{e}\right) \qquad 0 \leqq c_1 \leqq e-1,$$

in dem überhaupt noch Werthe von x vorkommen, wieder in obigem Sinne. Beschränken sich dieselben auf den Werth $c_0 + \frac{c_1}{e}$, so bildet er die verlangte Zahl g; in dem andern Falle theile man das eben erwähnte Intervall neuerdings in e Theile. U. s. f. Auf diese Weise gelangt man zur Einsicht, daſs entweder g eine Zahl von der Form

$$c_0 + \frac{c_1}{e} + \frac{c_2}{e^2} + \ldots + \frac{c_m}{e^m}$$

sein muſs, unter $c_1, c_2 \ldots c_m$ Ziffern verstanden, oder daſs eine Zahl

$$\mathfrak{c} = \left(c_0 + \frac{c_1}{e} + \ldots + \frac{c_n}{e^n}\right)$$

existiren muſs von der Eigenschaft, daſs in jedem Intervalle

$$\left(c_0 + \frac{c_1}{e} + \ldots + \frac{c_n}{e^n},\; c_0 + \frac{c_1}{e} + \ldots + \frac{c_n + 1}{e^n}\right),$$

wie grofs auch die ganze positive Zahl n sein mag, Werthe von x zu finden sind,

$$c_0 + \frac{c_1}{e} + \ldots + \frac{c_n + 1}{e^n}$$

aber bereits gröfser ist als jeder Werth von x. Daraus folgt, dafs, wenn x einen bestimmten dieser Werthe bedeutet, $\mathfrak{c} \geqq x$ (VII. 5, 2. Cor.), dafs aber, indem

$$\mathfrak{c} < c_0 + \frac{c_1}{e} + \ldots + \frac{c_n + 1}{e^n},$$

Werthe x_1 von x vorhanden sind, wofür

$$\mathfrak{c} - x_1 < \frac{1}{e^n},$$

d. i. kleiner sein kann als irgend eine gegebene Zahl $\varepsilon > 0$. Die Zahl $\mathfrak{c}$ ist somit die im Satze angekündigte Zahl g. Dafs es nur eine solche Zahl g geben kann, folgt aus der Relation $g \geqq x,\; g - x_1 < \varepsilon$ durch einen indirecten Beweis nach VII. 7.

Gehört g zu den Werthen von x, so ist es der gröfste derselben; die Veränderliche erreicht ihre obere Grenze. Im anderen Fall ist g ein Grenzwerth der Veränderlichen im eigentlichen Sinne ($\lim x = g$) d. i. ein Werth gröfser als alle der Veränderlichen ertheilten Werthe, dem sie jedoch beliebig nahe kommen. So ist in dem oben gebrachten Beispiele $x = 1 - \frac{1}{n}$ die obere Grenze $g = 1$ ein eigentlicher Grenzwerth.

Die vorstehende Entwickelung dient nur dazu, um die Existenz der Zahl g festzustellen, keineswegs aber, um dieselbe zu berechnen. Die letztere Aufgabe läfst sich nicht so einfach behandeln, sie erfordert vielmehr in jedem einzelnen Falle besondere Kunstgriffe. Ebensowenig ist bisher ein allgemeines Verfahren bekannt geworden, um durch eine endliche Anzahl von Operationen zu entscheiden, ob die obere Grenze einen Veränderlichen endlich oder unendlich ist.

Wendet man die obige Erörterung auf die Veränderliche $-x$ an, so gelangt man zur Festsetzung der unteren Grenze von x. Nimmt die Veränderliche Werthe an, kleiner als jede gegebene negative Zahl, so sagt man, ihre untere Grenze sei $-\infty$ oder sie habe den Grenzwerth $-\infty$. „Liegen aber sämmtliche Werthe der Veränderlichen x über einer bestimmten Zahl B, so existirt eine und nur eine Zahl k, unter welche kein Werth derselben sinkt; es giebt jedoch mindestens einen Werth x_2 von x, derart, dafs $x_2 - k$ gröfser ist als eine gegebene, sonst beliebige positive Zahl ε. k heifst die untere Grenze der Veränderlichen." Man hat demnach $x \geqq k$, aber $x_2 > k + \varepsilon$.

Endlich heifst eine Veränderliche, deren jeder Werth zwischen denselben Zahlen liegt.

2. Die Veränderliche x heifst in dem endlichen Intervalle (a, b) stetig, wenn sie alle reellen Werthe $a \leqq x \leqq b$ annimmt. Sie heifst im Intervalle (a, b) allenthalben überalldicht, wenn in jedem aus dem Intervalle (a, b) herausgehobenen Intervalle (a', b') — $a \leqq a' < b' \leqq b$ — mindestens ein Werth derselben vorkommt.

3. Ein- und mehrdeutige Functionen einer reellen Veränderlichen. Wenn jedem Werthe x einer genau definirten Veränderlichen ein und nur ein Werth y zugeordnet ist, so heifst y eine eindeutige Function der unabhängigen Veränderlichen x, in abgekürzter Schreibweise $y = f(x)$. Da der Bereich der letzteren unbegrenzt viele bestimmte Werthe umfafst, so kann eine solche Zuordnung nur durch eine arithmetische Vorschrift erfolgen, welche lehrt, wie zu irgend einem Werthe von x das zugehörige y berechnet werden kann.[2]) Werden in derselben Art jedem Werthe der unabhängigen Veränderlichen x zwei oder mehrere Werthe y zugeordnet, so nennt man y eine zwei- oder mehrdeutige Function von x. — Die unabhängige Veränderliche x heifst auch das Argument der Function.

Ein Polynom aus einer endlichen Anzahl von Gliedern der Form $a_r x^r$, worin a_r eine Constante, r eine ganze positive Zahl oder Null bedeutet, d. i.

$$F(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n \qquad (a_n \gtrless 0),$$

heifst eine ganze rationale Function von x und zwar vom n^{ten} Grade in x. Durch diesen Ausdruck wird jedem endlichen Werthe x ein Werth $y = F(x)$ zugeordnet. Der Quotient zweier ganzen Functionen $F(x)$, $G(x)$ bildet eine rationale Function von x. $G(x) : F(x)$ liefert zu allen jenen Werthen von x, wodurch $F(x)$ nicht zu Null gemacht wird, einen Werth $y = G(x) : F(x)$. — Es ist zweckmäfsig, die zuletzt gegebenen Begriffe sogleich auf mehrere unabhängige Veränderliche $x_1, x_2 \ldots x_m$ auszudehnen. Ein Aggregat von Gliedern der Form

$$a_{r_1, r_2 \ldots r_m} x_1^{r_1} x_2^{r_2} \ldots x_m^{r_m},$$

worin der erste Factor eine Constante, die $r_1, r_2 \ldots r_m$ ganze positive Zahlen oder Null bezeichnen, in endlicher Anzahl heifst eine ganze rationale Function der unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2 \ldots x_m$. Hat die Summe der Exponenten $r_1 + r_2 + \ldots + r_m$ in allen Gliedern einen und denselben Werth N, so sagt man, die Function sei homogen und von der Dimension N in $x_1, x_2 \ldots x_m$. Wenn diese Summe verschiedene Werthe besitzt, so sei N der gröfste derselben: der ganzen Function wird dann die Dimension N in den $x_1, x_2 \ldots x_m$ beigelegt. Der Quotient zweier ganzen Functionen in $x_1, x_2 \ldots x_m$ bildet eine rationale Function dieser Veränderlichen. — Setzt man eine ganze Function gleich 0, so erhält man eine algebraische Gleichung.

Der VIII. Abschnitt bietet neue Beispiele von Functionen dar. Wir haben die Potenz a^x $(a > 0)$ nacheinander definirt für positive ganzzahlige, für rationale, für irrationale Werthe des Exponenten x. Im ersten Falle war

$$a^x = a \cdot a \ldots a \ (x \,\text{mal});$$

im zweiten

$$x = \frac{m}{n} \qquad a^x = (\sqrt[n]{a})^m,$$

im dritten

$$x = (\varphi_n) \qquad a^x = \lim a^{\varphi_n} \qquad (\lim n = +\infty).$$

So wurde jedem reellen Werthe von x ein Werth a^x zugeordnet, also für die Gesammtheit der reellen Werthe von x eine eindeutige Function definirt, die wir fortan die Exponential-Function nennen werden. — Beschränken wir die Variabele x auf positive Werthe, so definirt x^μ, wo μ eine beliebige reelle Zahl aufser 0 sein kann, die Potenzfunction, welcher, falls $\mu > 0$ für $x = 0$, der Werth 0 zukommt. Desgleichen definirt die Gleichung $B^y = x$ für positive Werthe von x eine eindeutige Function von x, den B-Logarithmus $y = {}^B\log x$.

Es hindert nichts, das Gesetz der Zuordnung zwischen je zwei Zahlen x, y nach Willkür anzunehmen. Ordnet man z. B. jedem rationalen Werthe des Intervalles $(0, 1)$ den Werth $y = 0$, jedem irrationalen desselben den Werth $y = 1$ zu, so bilden diese Werthe y eine eindeutige Function, definirt für alle Werthe x: $0 \leqq x \leqq 1$.

Den rationalen Functionen von x gegenüber bieten die nachher aufgeführten Functionen einen wesentlichen Unterschied dar. Die ganze Function $y = F(x)$ ist ein Ausdruck, der gestattet, y für alle Werthe von x unmittelbar zu berechnen. Es sind nur mit der Zahl x gewisse Multiplicationen vorzunehmen und die so erhaltenen Glieder hinterher zu addiren. Auch wenn y durch den Grenzwerth eines in x rationalen Ausdruckes definirt ist, etwa $y = \lim \varphi_n(x)$ bei $\lim n = +\infty$, so kann die Zahl y aus x unmittelbar berechnet werden. In einem solchen Falle, d. i. wenn ein einziger analytischer Ausdruck gegeben ist, welcher die Berechnung der Zahl $y = f(x)$ aus jedem der der unabhängigen Veränderlichen x beigelegten Werthe ermöglicht, sagen wir die Function sei für diesen Bereich von x analytisch dargestellt. Die oben gegebene Definition der Exponentialfunction ist nicht von dieser Art. Dagegen sind analytische Darstellungen derselben in den folgenden Definitionen enthalten

$$= e^x \lim_{n=+\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n,$$

$$e^x = \lim_{n=+\infty}\left\{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right\}.$$

Ebensowenig haben wir bisher eine analytische Darstellung der Potenzfunction x^μ, falls μ keine ganze Zahl ist, kennen gelernt.

Setzt man fest, dafs zwischen zwei Veränderlichen x, y eine algebraische Gleichung $F(x, y) = 0$ bestehe, so wird die eine derselben als eine algebraische Function der anderen als unabhängig vorausgesetzten betrachtet. Dabei kann sie (selbstverständlich bei alleiniger Berücksichtigung von reellen Werthen) eine mehrdeutige Function der anderen sein.

Wenn eine irgendwie definirte Function von x weder durch einen in x rationalen Ausdruck dargestellt werden kann, noch für alle der unabhängigen Veränderlichen x beigelegten Werthe einer und derselben algebraischen Gleichung Genüge leistet, so heifst sie transcendent. Solche Functionen sind die Exponentialfunction, die Potenzfuuction bei irrationalem Exponenten, der Logarithmus. Der Beweis, dafs keine von ihnen eine algebraische Gleichung $F(x, y) = 0$ identisch erfüllt, kann hier nicht geliefert werden.

Zusammengesetzt heifst eine eindeutige Function z von x, wenn die Zuordnung des Werthes z zu jedem Werthe von x in der Art bewerkstelligt ist, dafs einem solchen zuerst ein bestimmter Werth y und diesem dann ein Werth z zugeordnet wird. Die abgekürzte Bezeichnung hierfür ist $z = \varphi\{f(x)\}$. Zwischen x und z können auch zwei oder mehrere Zwischenglieder eingeschoben werden.

4. Eine eindeutige Function kann für alle Werthe von x in dem Intervalle (a, b) definirt sein, mit Ausnahme einer endlichen Anzahl derselben. Dies tritt z. B. bei gebrochenen rationalen Functionen ein, wenn das Intervall Werthe von x enthält, wofür der Nenner 0 ist. So ist $y = 1 : x$ für alle x im Intervalle $(-1, +1)$ definirt, ausgenommen $x = 0$. Für $x = 0$ hat y keinen Sinn, dagegen kann man $1 : y$ 0 sein lassen. Man sagt in dem Falle, dafs $f(x)$ für einen bestimmten Werth $x = a$ nicht definirt, dem reciproken Werthe $1 : f(x)$ aber für $x = a$ der Werth 0 beigelegt ist, die Function $f(x)$ sei für $x = a$ unendlich: $f(a) = \infty$. In dieser Formel hat das Symbol ∞

kein Vorzeichen, während es in Nr. 1 mit einem versehen ist. Man wird auch, wenn, wie es üblich ist, statt $+\infty$ „∞" gesetzt wird, die doppelte Bedeutung des Unendlichen in der Functionentheorie leicht auseinander halten.[3])

Betrachtet man an Stelle von $f(x)$ die zusammengesetzte Function von y

$$f(1:y) = \varphi(y),$$

so ist dieselbe für $y = 0$ durch $f(x)$ nicht definirt. Setzt man aber fest, dafs $\varphi(0) = b$ sei, so sagt man $f(x)$ sei für den Werth $x = \infty$ (ohne Vorzeichen) definirt: $f(\infty) = b$. Man kann auch annehmen, es sei für $y = 0$ $\varphi(y)$ nicht definirt, dagegen $1:\varphi(y) = 0$. Dann heifst es, $f(x)$ ist für den Werth $x = \infty$ unendlich: $f(\infty) = \infty$. — So werden zu $f(x) = x^{-\mu}$ $(\mu > 0)$ die Werthe

$$f(0) = \infty, \qquad f(\infty) = 0,$$

zu $f(x) = x^{\mu}$ $f(\infty) = \infty$ gezogen; 0^{μ} ist nach VIII. 8 0.

5. Grenzwerthe der Functionen einer Veränderlichen. Nehmen wir an, es sei die eindeutige Function $y = f(x)$ definirt für unbegrenzt viele Werthe x in dem Intervalle $(a, a+d)$ — $d > 0$ —, welche sich dem Grenzwerthe a beliebig nähern, sodafs zu jeder Zahl $\delta > 0$ mindestens ein Werth x_1 von x gehört, derart, dafs $a < x_1 < a + \delta$. Dabei genügt es anzunehmen, dafs x dem Werthe a fallend sich nähere, also $x - a > 0$ sei; was kurz durch die Formel $\lim x = a + 0$ ausgedrückt wird. Ob $f(x)$ für $x = a$ selbst definirt ist oder nicht, kommt hier nicht in Betracht. Man wird nun fragen, was sich aus dieser Annahme für die Werthe von $f(x)$ ergiebt. Darauf können wir jetzt noch keine Antwort ertheilen, sondern müssen uns auf die Aufzählung einiger besonderen Fälle beschränken.

Man sagt, die Function $y = f(x)$ besitze, während x in der angegebenen Weise dem Werthe a sich nähert, einen endlichen Grenzwerth b d. h. es bestehe die Formel

$$\lim_{x=a+0} f(x) = b \tag{1}$$

dann und nur dann, wenn jeder positiven Zahl ε eine positive Zahl δ zugeordnet werden kann, derart, dafs der absolute Betrag von $f(x) - b$ kleiner ist als ε für jeden der Veränderlichen x zufolge ihrer Definition zukommenden Werth, der zwischen a und $a + \delta$ liegt.[4]) D. i.

$$a < x < a + \delta \qquad |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Und ferner: Es ist

(2) $$\lim_{x=a+0} f(x) = +\infty \quad (\text{bez. } -\infty),$$

wenn jeder positiven (negativen) Zahl G eine positive Zahl δ zugeordnet werden kann, derart, dafs $f(x) > G$ (bez. $< G$) für jeden der Veränderlichen x zufolge ihrer Definition zukommenden Werth, der zwischen a und $a + \delta$ liegt.

Wenn $f(x)$ selbst weder den Grenzwerth $+\infty$, noch $-\infty$ jedoch $\lim |f(\alpha)| = +\infty$ bei $\lim x = a + 0$ ist, so spricht man manchmal von „Unbestimmt-unendlich Werden" von $f(x)$, ein Ausdruck, den man fallen lassen kann, da sich dieses Verhalten von $f(x)$ in anderer Weise charakterisiren läfst (vgl. Nr. 7, IV).

In ähnlicher Weise wird man Formeln, wie

$$\lim_{x=a-0} f(x) = b$$

erklären, wobei angenommen ist, dafs die unabhängige Veränderliche x sich steigend dem Grenzwerthe a nähert, d. h. dafs jeder positiven Zahl δ mindestens ein Werth x_2 von x entspricht, derart, dafs

$$a - \delta < x_2 < a.$$

Die Formel

$$\lim_{x=a} f(x) = b$$

endlich bedeutet, dafs jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta > 0$ zugeordnet werden kann, derart, dafs

$$|f(x) - b| < \varepsilon$$

für alle der Veränderlichen x gemäfs ihrer Definition zukommenden Werthe, welche der Bedingung Genüge leisten:

$$|x - a| < \delta.$$

Ist eine eindeutige Function $y = f(x)$ für Werthe von x erklärt, die jede positive Zahl überschreiten, so kann, wie wir schon im VII. Abschnitte erfahren haben, $f(x)$ sich einem endlichen Grenzwerthe b nähern, auch kann sie den Grenzwerth $+\infty$ oder $-\infty$ haben. Die Formel

$$\lim_{x=+\infty} f(x) = b$$

bedeutet, dafs jeder positiven Zahl ε eine Zahl $G > 0$ zugeordnet werden kann, derart, dafs

$$|f(x) - b| < \varepsilon$$

für alle der Veränderlichen x gemäfs ihrer Definition zukommenden Werthe, welche $> G$ sind Den Sinn der Formeln

$$\lim_{x=+\infty} f(x) = +\infty, \quad \text{oder} \quad = -\infty,$$

kann man unmittelbar aus den Angaben von VII. 2 entnehmen. Ebensowenig wird es einer Schwierigkeit begegnen, sich die Bedeutung von Formeln, wie

$$\lim_{x=-\infty} f(x) = b \qquad \lim_{x=\infty} f(x) = b,$$

klar zu machen. Die letztere besagt, dafs zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $G > 0$ gehört, derart, dafs

$$|f(x) - b| < \varepsilon,$$

wenn nur $|x| > G$.

Die ausdrückliche Berücksichtigung aller im Vorstehenden aufgezählten Grenzübergänge der unabhängigen Veränderlichen x würde die folgenden Erörterungen weitläufig gestalten. Sie ist aber nicht nöthig, da man das über einen Grenzübergang Gesagte unmittelbar auf alle anderen übertragen kann. Durch lineare Substitutionen für x läfst sich die Zurückführung der Grenzübergänge auf einander systematisch herstellen. So reducirt man alle einseitigen Grenzübergänge auf den Fall

$$\lim x' = a' + 0$$

durch eine der Substitutionen

$$x = -x', \quad \frac{1}{x' - a'}, \quad \frac{1}{a' - x'} \quad \text{(vgl. Nr. 9. III).}$$

Ist $f(x)$ erklärt für alle x im Intervalle $a < x \leqq a + d$ und bei $\lim x = a + 0$ ein Grenzwerth von $f(x)$ vorhanden, so bezeichnet man denselben oft mit $f(a + 0)$. Aehnlich versteht man unter $f(a - 0)$ $\lim f(x)$ bei $x = a - 0$, unter $f(+\infty)$ $\lim f(x)$ bei $x = +\infty$, unter $f(-\infty)$ $\lim f(x)$ bei $x = -\infty$.

Beispiele. 1.) „Beim stetigen Grenzübergange $\lim x = +\infty$ ist $\lim a^x = +\infty$ oder 0, je nachdem $a \gtrless 1$." — Wenn $a > 1$, setze man $a = 1 + d$ $(d > 0)$ und bemerke nach VIII. 8, dafs $a^x > 1 + xd$. Man hat somit $a^x > G$ wenn $x > (G - 1) : d$, was auch die positive Zahl G sein mag. — Wenn $0 < a < 1$, setzt man $a = 1 : (1 + d)$ $(d > 0)$ und findet $a^x < 1 : (1 + xd)$, so dafs $a^x < \varepsilon$, wenn

$$x > (1 - \varepsilon) : d\varepsilon.$$

Mit diesem Satze identisch ist der folgende: „Beim stetigen Grenzübergange $\lim x = -\infty$ ist $\lim a^x = 0$ oder $+\infty$, je nachdem $a \gtrless 1$."

2.) Bei $\lim x = +\infty$ ist $\lim x^\mu = +\infty$ oder 0, je nachdem $\mu >$ oder < 0. Bei $\lim x = 0$ ist $\lim x^\mu = 0$ oder $+\infty$, je nachdem $\mu >$ oder < 0.

3.) Es ist

$$\lim_{x=+\infty} {}^B\!\log x = +\infty, \quad \lim_{x=+0} {}^B\!\log x = -\infty.$$

Denn für $x > B^G$ ist $\log x > G$, für $0 < x < B^{-G}$ ist

$$\log x < -G.$$

Im Anschlusse an diese Formeln ist festgesetzt worden:

$${}^B\!\log 0 = \infty, \qquad {}^B\!\log \infty = \infty.$$

Der Sinn der Definitionen ist in Nr. 4 angegeben; ihre Begründung läfst sich hier nicht vollständig anführen, indem die Function ${}^B\!\log x$ bisher nur für positive x erklärt ist. Man pflegt nämlich sonst $f(a) = \infty$ zu setzen, wenn

$$\lim |f(x)| = +\infty$$

bei

$$\lim x = a \pm 0;$$

$f(\infty) = b$ (endlich), wenn

$$\lim f(x) = b \text{ bei } \lim x = \infty,$$

$f(\infty) = \infty$, wenn

$$\lim |f(x)| = +\infty \quad \text{bei} \quad \lim x = \infty.$$

6. Der wichtigste Fall, in welchem die Existenz eines Grenzwerthes unmittelbar sich ergiebt, ist in dem folgenden Satze ausgesprochen.

Satz. „Wenn die eindeutige Function $f(x)$, während x fallend oder steigend sich dem Grenzwerthe a nähert, ohne ihn je zu erreichen, niemals abnimmt (zunimmt), jedoch nicht beständig derselben Zahl gleich bleibt, so existirt für $f(x)$ immer ein Grenzwerth beim Grenzübergange

$$\lim x = a \pm 0.$$

Und zwar ist die obere (untere) Grenze der Veränderlichen $y = f(x)$ dieser Grenzwerth. Er ist also $+\infty$ $(-\infty)$, wenn $f(x)$ Werthe annehmen kann, gröfser (kleiner) als irgend eine gegebene positive (negative) Zahl. Wenn aber alle Werthe von $f(x)$ unter (über) einer bestimmten Zahl A liegen, so ist er endlich und gröfser (kleiner) als jeder derselben.“

Beweis. Wir nehmen an, die der unabhängigen Veränderlichen ertheilten Werthe liegen im Intervalle

$$(a, a + d) \qquad d > 0.$$

Nach Nr. 1 haben die ihnen zugehörigen Werthe von $f(x)$, welche bei abnehmenden x nicht zunehmen sollen, eine obere Grenze. Ist sie $+\infty$, so giebt es zu jeder Zahl $G > 0$ mindestens einen Werth x_1, derart, dafs $f(x_1) > G$. Und da neben $a < x < x_1$

$$f(x) \geqq f(x_1) > G,$$

so folgt

$$\lim_{x=a+0} f(x) = +\infty.$$

Wenn aber sämmtliche $f(x) < A$, so ist ihre obere Grenze eine Zahl g, hier offenbar gröfser als jeder Werth von $f(x)$. Zugleich entspricht jeder Zahl $\varepsilon > 0$ mindestens ein Werth x_1, derart, dafs

$$f(x_1) > g - \varepsilon.$$

Daraus folgt, wegen $f(x) \geqq f(x_1)$ für $a < x < x_1$,

$$0 < g - f(x) < \varepsilon$$

für alle $a < x < x_1$, d. i.

$$\lim f(x) = g,$$

bei

$$\lim x = a + 0.$$

Beispiel. „Ist

$$f_1 = \sqrt{a}, \qquad f_2 = \sqrt{a + \sqrt{a}}$$

und

$$f_{n+1} = \sqrt{a + f_n} \qquad (n = 1, 2 \ldots)$$

worin a und sämmtliche Wurzeln positiv, so existirt für f_n bei $\lim n = +\infty$ ein endlicher Grenzwerth b." Denn die f_n wachsen mit n. Es ist

$$f_1 < f_2$$

und wenn

$$f_{n-1} < f_n,$$

so ist

$$a + f_{n-1} < a + f_n,$$

also

$$f_n < f_{n+1}.$$

Dabei ist

$$f_n < 1 + \sqrt{a}.$$

Das ist richtig für $n = 1$. Setzen wir nun die Relation auch als bestehend voraus, so folgt

$$a + f_n < 1 + \sqrt{a} + a < (1 + \sqrt{a})^2,$$

also auch

$$f_{n+1} < 1 + \sqrt{a}.$$

Somit ist $\lim f_n$ bei $\lim n = +\infty$ eine endliche Zahl $b > f_n$, welche wir in Nr. 12 bestimmen werden.

Weitere Beispiele für die Anwendung dieses Satzes s. X. 4, 12.

7. Der vorstehende Satz gestattet uns, die oben aufgeworfene Frage zu beantworten, was wir in jedem Falle über die Werthe einer eindeutigen Function $f(x)$ aussagen können, wenn sie für solche Werthe von x definirt ist, die einem Grenzwerthe z. B. fallend sich nähern. Es sei also $f(x)$ definirt für Werthe von x im Intervalle $(a, a + d)$ die sich dem Werthe a unbegrenzt nähern: $a < x < a + d$. x_0 bedeute einen beliebigen Werth innerhalb $(a, a + d)$. Die Veränderliche $y = f(x)$ hat im Intervalle $a < x < x_0$

eine obere Grenze, wobei nur zwei Fälle eintreten können. Entweder ist sie, wie nahe auch x_0 an a gewählt wird, stets $+\infty$ oder x_0 kann so angesetzt werden, dafs sie eine endliche Zahl $g(x_0)$ ist. Im letzteren Falle mufs, wie aus der Definition der oberen Grenze unmittelbar hervorgeht, auch in jedem Intervalle (a, x'_0) — $a < x'_0 < x_0$ — die obere Grenze von y endlich sein und zwar kann sie unmöglich gröfser als $g(x_0)$ sein.[5]) Denken wir uns x_0 veränderlich, so müssen wir nun schliefsen

$$g(x'_0) \leqq g(x_0) \qquad a < x'_0 < x_0.$$

Die Function $g(x_0)$ nimmt also bei abnehmenden x_0 niemals zu, hat somit nach Nr. 6 beim Grenzübergange $\lim x_0 = a + 0$ einen Grenzwerth, der eine endliche Zahl O oder $-\infty$ sein kann. Wir müssen nun nachsehen, wie in den bisher unterschiedenen drei Fällen die Werthe von $f(x)$ selbst sich verhalten. In dem ersten gehört zu jeder positiven Zahl G eine Zahl $\delta > 0$, derart, dafs es in jedem Intervalle (a, x_0), wo $a < x_0 < a + \delta$, mindestens einen Werth x_1 von x giebt, wofür $f(x_1) > G$. Im zweiten Falle wissen wir, dafs jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta > 0$ entspricht, derart, dafs

$$O + \varepsilon > g(x_0) \geqq O,$$

wenn nur

$$a < x_0 < a + \delta.$$

Daneben hat man für $a < x < x_0$

$$g(x_0) \geqq f(x),$$

jedoch für mindestens einen Werth x innerhalb des Intervalles (a, x_0)

$$f(x_1) > g(x_0) - \varepsilon.$$

Man schliefst daraus: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gehört ein $\delta > 0$, derart, dafs

$$f(x) < O + \varepsilon,$$

wenn nur

$$a < x < a + \delta;$$

dafs es jedoch in jedem Intervalle (a, x_0), wo

$$a < x_0 < a + \delta,$$

mindestens einen Werth von $x = x_1$ giebt, wofür

$$f(x_1) > O - \varepsilon.$$

Man wird sogleich bemerken, daſs wenn überhaupt eine Zahl O von der angegebenen Beschaffenheit existirt, es nur eine geben kann. Denn hätte O' die nämlichen Eigenschaften wie O, so würde unmittelbar folgen $|O - O'| < 2\varepsilon$, was auch $\varepsilon > 0$ sein mag, d. i. $O = O'$ (VII. 7). Im dritten Falle, wo $\lim g(x_0) = -\infty$, gehört zu jeder Zahl $-G < 0$ eine Zahl $\delta > 0$, derart, daſs

$$g(x_0) < -G$$

für alle

$$a < x_0 < a + \delta.$$

Man findet somit auch

$$f(x) < -G$$

für

$$a < x < a + \delta;$$

also ist hier

$$\lim_{x=a+0} f(x) = -\infty.$$

Es erhellt unmittelbar, daſs aus dem Verhalten von $f(x)$ nach den drei angegebenen Fällen, auſser denen andere nicht möglich sind, auf das von $g(x_0)$ zurückgeschlossen werden kann. Auf diese Art gelingt es oft, O zu bestimmen.

Ganz ähnlich wäre die Untersuchung verlaufen, wenn wir an Stelle der oberen Grenze $g(x_0)$ von y die untere $k(x_0)$ betrachtet hätten. Es würden sich dann folgende Fälle herausgestellt haben. Entweder

1) Es gehört zu jeder Zahl $-G > 0$ eine Zahl $\delta > 0$, derart, daſs in jedem Intervalle (a, x_0), wo $a < x_0 < a + \delta$, mindestens ein Werth x_1 von x vorkommt, wofür

$$f(x_1) < -G.$$

Oder

2) Es existirt eine Zahl U von der folgenden Eigenschaft. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gehört eine Zahl $\delta > 0$, derart, daſs

$$f(x) > U - \varepsilon$$

für alle

$$a < x < a + \delta,$$

dafs es jedoch in jedem Intervalle (a, x_0), wo

$$a < x_0 < a + \delta,$$

mindestens einen Werth x_1 von x giebt, wofür

$$f(x_1) > U + \varepsilon.$$

Oder

3) Es ist

$$\lim_{x=a+0} f(x) = +\infty.$$

Wir finden zunächst: Wenn die Zahlen O und U einander gleich sind, so hat $f(x)$ bei $\lim x = a + 0$ einen endlichen Grenzwerth und zwar ist es der gemeinsame Werth derselben. Und umgekehrt: Ist $\lim f(x) = b$ (endlich) bei $\lim x = a + 0$, so sind

$$O = U = b$$

zu setzen. Beide Sätze ergeben sich unmittelbar.

Scheiden wir die Fälle, in denen $f(x)$ bei $\lim x = a + 0$ einen Grenzwerth besitzt, als etwas bereits Bekanntes aus, so bleiben noch vier andere übrig, in denen nach dem Vorstehenden ein solcher nicht vorhanden sein kann.

I. $f(x)$ ist für alle Werthe von x, welche in das Intervall $(a, a + d)$ fallen, zwischen zwei gegebenen Zahlen gelegen $(A > f(x) > B)$ und es existiren zwei Zahlen

$$A \geqq O > U \geqq B,$$

welche die oben erwähnten Eigenschaften haben. Nach dem Vorschlage des Entdeckers derselben, P. du Bois-Reymond,[6]) mögen sie die Unbestimmtheitsgrenzen von $f(x)$ beim Grenzübergange $\lim x = a + 0$ und zwar O die obere, U die untere heifsen. $O - U$ wird als der Sprung von $f(x)$ für $\lim x = a + 0$ bezeichnet.

II. (III.) Die Werthe von $f(x)$ sind in keinem Intervalle (a, x_0) — $a < x_0$ — endlich. Wenn jedoch für

$$a < x \leqq a + d \qquad f(x) > B \qquad (< A),$$

so existirt eine bestimmte untere (obere) Unbestimmtheitsgrenze

$$U \geqq B \qquad (O \leqq A) \quad \text{bei} \quad \lim x = a + 0.$$

Der Gleichförmigkeit wegen sagt man nun, es sei die obere (untere) Unbestimmtheitsgrenze bei

$$\lim x = a + 0 \qquad + \infty \; (-\infty).$$

IV. In jedem Intervalle (a, x_0) ist die obere Grenze von $f(x)$ $+\infty$, die untere $-\infty$. Man sagt dann, es sei bei $\lim x = a + 0$ die obere Unbestimmtheitsgrenze $+\infty$, die untere $-\infty$. — Hierher gehört namentlich der Fall des „Unbestimmt-unendlich-werdens“ von $f(x)$ bei $\lim x = a + 0$ (s. Nr. 5).

Nach Einführung der unendlichen Unbestimmtheitsgrenzen kann man ohne Beschränkung behaupten: „Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz eines Grenzwerthes $\lim f(x)$ bei $\lim x = a + 0$ ist das Zusammenfallen der Unbestimmtheitsgrenzen für $\lim x = a + 0$.“

Ein einfaches Beispiel des Falles I. bietet dar die Function

$$f(n) = (-1)^n \left\{1 + \frac{1}{n}\right\},$$

wo n jede ganze positive Zahl sein kann. Hier sind die Unbestimmtheitsgrenzen bei $\lim n = +\infty$ $+1$ und -1. Für die Function $(-1)^n n$ sind sie bei dem nämlichen Grenzübergange $+\infty$ und $-\infty$.

Für

$$f(n) = n\,(1 + (-1)^n)$$

endlich sind eben dieselben $+\infty$ und 0.

8. Wir gehen nun zur Untersuchung der Bedingung über, unter welcher die eindeutige Function $f(x)$ bei einem bestimmten Grenzübergange der unabhängigen Veränderlichen, etwa bei $\lim x = a + 0$, einen endlichen Grenzwerth b besitzt. Da nun zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta > 0$ gehört, derart, daſs

$$|f(x) - b| < \varepsilon \quad \text{wenn nur} \quad a < x < a + \delta,$$

so schlieſsen wir, wie in VII. 3, daſs

$$|f(x') - f(x)| < 2\varepsilon$$

sein muſs für alle der Veränderlichen x zukommenden Werthe, die der Relation $a < x' < x < a + \delta$ genügen.

Satz. „Die notwendige und hinreichende Bedingung, dafs $f(x)$ beim Grenzübergange lim $x = a + 0$ einen endlichen Grenzwerth besitze, besteht in Folgendem. Zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ mufs sich eine Zahl $\delta > 0$ bestimmen lassen, derart, dafs für alle der unabhängigen Veränderlichen zukommenden Werthe x, x' innerhalb des Intervalles $(a, a + \delta)$

$$|f(x') - f(x)| < \varepsilon.\text{“}$$

Dabei möge x' den kleineren der beiden Werthe bezeichnen. Aehnlich lautet die Bedingung für andere Grenzübergänge der unabhängigen Veränderlichen. Einen Fall, wo lim $x = + \infty$, haben wir VII. 3 und 11 angeführt.[7])

Dafs die genannte Bedingung auch hinreichend sei, ergiebt sich aus der Erörterung VII. 11, wo die Existenz des Grenzwerthes durch Entwickelung desselben in die systematische Form nachgewiesen wurde.

Im Anschlusse an die vorige Nummer können wir den Beweis auch so führen, dafs wir zeigen, dafs in dem vorliegenden Falle die Unbestimmtheitsgrenzen O, U von $f(x)$ bei lim $x = a + 0$ endlich und einander gleich sein müssen. Dafs sie endliche Zahlen seien, erhellt sofort. Es entspricht aber jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta > 0$, so dafs für alle $a < x < a + \delta$

$$U - \varepsilon < f(x) < O + \varepsilon$$

und wenn x_0 irgend einen Werth innerhalb des Intervalles $(a, a + \delta)$ bedeutet, so mufs es zwei Zahlen x_1, x_2 innerhalb (a, x_0) geben, wofür

$$f(x_1) > O - \varepsilon; \qquad f(x_2) < U + \varepsilon.$$

Da nun zufolge Voraussetzung auch angenommen werden kann, dafs für $a < x' < x < a + \delta$

$$f(x) - \varepsilon < f(x') < f(x) + \varepsilon;$$

so folgt, wenn nach Fixirung von x_0 zuerst x_1 für x, dann ein im Intervalle (a, x_1) vorkommender Werth x_3 von derselben Beschaffenheit wie das obige x_2 für x' eingesetzt wird:

$$f(x_1) - \varepsilon < f(x_3)$$

und

$$O - 2\varepsilon < U + \varepsilon$$

also

$$0 \leqq O - U < 3\varepsilon,$$

d. i.

$$O = U \qquad \text{(VII. 7).}$$

9. In der Praxis gilt der Satz der vorigen Nummer als das äufserste Mittel, um sich von der Existenz eines endlichen Grenzwerthes zu überzeugen. In der That kommt man oft mit einfacheren Sätzen durch. Aufser dem Satze in Nr. 6 sind zunächst noch die folgenden zu erwähnen.

I. „Hat $f(x)$ bei irgend einem Grenzübergange der unabhängigen Veränderlichen x einen endlichen Grenzwerth b, so haben die Functionen $f(x)+k$, $kf(x)$ (wo k eine von Null verschiedene Constante bezeichnet) beim nämlichen Grenzübergange von x bez. den Grenzwerth $b+k$, kb. — Ist $\lim f(x)$ unendlich, so haben die genannten Functionen auch einen unendlichen Grenzwerth.“

„Die Function $1:f(x)$ hat, wenn b nicht Null ist, den Grenzwerth $1:b$. Ist $b=0$, jedoch in der Art, dafs die Werthe von $f(x)$ schliefslich dasselbe Vorzeichen besitzen (d. i. wenn $\lim f(x) = +0$ oder -0), so ist $\lim (1:f(x))$ unendlich. Wenn $|f(x)|$ einen unendlichen Grenzwerth hat, so ist $\lim (1:f(x)) = 0$.“

„Hat bei demselben Grenzübergange von x, wie oben, auch die Function $g(x)$ einen endlichen Grenzwerth c, so nähern sich die Functionen $f(x)+g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ bezüglich den Grenzwerthen $b+c$, bc. — Die Function $f(x)+g(x)$ hat einen unendlichen Grenzwerth, wenn einer der Grenzwerthe $\lim f(x)$, $\lim g(x)$ endlich, der andere unendlich ist und wenn diese beiden Grenzwerthe entweder $+\infty$ oder $-\infty$ sind. Die Function $f(x)\cdot g(x)$ hat einen unendlichen Grenzwerth, wenn einer der Grenzwerthe $\lim f(x)$, $\lim g(x)$ unendlich, der andere nicht Null ist.“

Diese Sätze ergeben sich unmittelbar aus den Definitionen in Nr. 5. Einige sind für einen speciellen Grenzübergang von x schon in VII. 4 gezeigt, die Beweise gelten indefs auch für den allgemeinen Fall. — Wir schliefsen daraus weiter:

„Die Function $g(x):f(x)$ hat einen Grenzwerth, wenn die Grenzwerthe $\lim f(x)$, $\lim g(x)$ nicht zugleich Null oder zugleich unendlich sind. Wird diese Annahme ausgeschlossen, so kann man behaupten: es ist

$$\lim \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{c}{b},$$

falls b nicht 0 ist; er ist 0, wenn $\lim f(x)$ unendlich; dagegen unendlich wenn $\lim g(x)$ unendlich ist, oder $\lim f(x)$ Null ist und zwar in der Art, dafs $f(x)$ schliefslich ein bestimmtes Vorzeichen hat.“

Aus dem Vorstehenden kann man entnehmen, dafs das Verhalten von $f(x)+g(x)$ bei einem Grenzübergange von x, der für diese Functionen entgegengesetzt unendliche Grenzwerthe liefert, Gegenstand einer besonderen Untersuchung sein mufs. Dasselbe gilt für $f(x)\cdot g(x)$, wenn der eine der beiden Grenzwerthe $\lim f(x)$, $\lim g(x)$ unendlich, der andere 0 ist — und endlich für den Quotienten $g(x):f(x)$, falls die genannten Grenzwerthe entweder beide 0, oder beide unendlich sind.

Man leitet ferner ohne Mühe den Satz ab:

„Für einen und denselben Grenzübergang der unabhängigen Veränderlichen x sollen die Functionen $f_1(x)$, $f_2(x)$ $\ldots f_m(x)$ bezüglich die endlichen Grenzwerthe $b_1, b_2 \ldots b_m$ besitzen. Es sei ferner $R(y_1, y_2 \ldots y_m)$ eine rationale Function der Veränderlichen $y_1, y_2 \ldots y_m$. Dann hat man beim genannten Grenzübergang von x

$$\lim R\,(f_1(x), f_2(x), \ldots f_m(x)) = R(b_1, b_2, \ldots b_m),$$

wenn der Nenner von R durch die Substitution $y_1 = b_1$, $y_2 = b_2 \ldots y_m = b_m$ nicht den Werth 0 annimmt.“ — Wird der Nenner durch die genannte Substitution Null, der Zähler aber nicht, und erhält der erstere schliefslich gleichbezeichnete Werthe, so ist $\lim R\,(f_1(x)\ldots)$ unendlich.

II. Wir schliefsen an das obige zwei Sätze über endliche Grenzwerthe, die uns in specialisirter Fassung in VII. 5 als Definitionen begegnet sind.

1. „Es ist $\lim f(x)$ (z. B. für den Grenzübergang $\lim x = a + 0$) gröfser (kleiner) als eine bestimmte Zahl k, wenn eine positive (negative) Zahl ϱ existirt, derart, dafs für alle der Veränderlichen x zukommenden Werthe, die in einem bestimmten Intervalle $(a, a + d)$ — $d > 0$ — liegen:

$$f(x) - k > \varrho \qquad (< \varrho)$$

ist.“

„Weifs man, dafs für alle hierher gehörigen x

$$a < x < a + d \qquad f(x) > k \ (< k),$$

so kann man, falls $\lim f(x)$ existirt, nur schliefsen:

$$\lim f(x) \geqq k \ (\leqq k).“$$

2. „Es ist $\lim f(x) > \lim g(x)$ (beide Grenzwerthe auf denselben Grenzübergang von x bezogen), falls eine positive Zahl ϱ existirt, derart, dafs für alle hierher gehörigen x

$$a < x < a + d \qquad f(x) - g(x) > \varrho$$

ist.“

„Weifs man, dafs für die nämlichen Werthe von x

$$f(x) > g(x),$$

so kann man, die Existenz der Grenzwerthe vorausgesetzt, nur schliefsen:

$$\lim f(x) \geqq \lim g(x).“$$

Die Sätze ergeben sich unmittelbar. Ist

$$\lim f(x) = b, \qquad \lim g(x) = c$$

bei demselben Grenzübergange $\lim x = a + 0$, so hat man zu jedem $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}\varrho$ ein $\delta > 0$, derart dafs

$$a < x < a + \delta \qquad f(x) < b + \varepsilon \qquad g(x) > c - \varepsilon,$$

also

$$\varrho < f(x) - g(x) < b - c + 2\varepsilon,$$

somit

$$0 < b - c.$$

U. s. w.

III. Aus einer Grenzwerthformel kann man durch Substitution für die unabhängige Veränderliche neue Formeln ableiten nach dem folgenden Satze:

„Es sei bei einem bestimmten Grenzübergange von y z. B. $\lim y = b + 0$, $\lim \varphi(y)$ vorhanden. Ordnet man die soeben benutzten Werthe von y einer neuen Veränderlichen x zu, sodaſs y als eindeutige Function $f(x)$ von x erscheint, und zwar in der Art, daſs $\lim f(x) = b$ etwa für $\lim x = a + 0$; so besteht die Relation

$$\lim_{y=b+0} \varphi(y) = \lim_{x=a+0} \varphi\{f(x)\}.“$$

Beweis. Es sei z. B. $\lim \varphi(y)$ eine endliche Zahl c. Nach Voraussetzung gehört zu jeder Zahl $\eta > 0$ eine Zahl $\varepsilon > 0$, derart, daſs

$$|c - \varphi(y)| < \eta$$

für diejenigen Werthe $b < y < b + \varepsilon$, die vermöge der Definition von y in Betracht kommen. Aber es ist auch $0 < y - b < \varepsilon$, wenn nur $a < x < a + \delta$. Man hat somit

$$|c - \varphi\{f(x)\}| < \eta,$$

wenn nur $a < x < a + \delta$, womit der Satz bewiesen ist.

Beispiele für die Anwendung des Satzes s. Nr. 10. I. — Häufig gebraucht man einen speciellen Fall desselben, vgl. Nr. 12.

10. Einige Bedingungen, unter welchen in den in der vorigen Nummer aufgeführten Ausnahmefällen Grenzwerthe existiren. Es handelt sich also um das Verhalten von Differenzen $f(x) - g(x)$, in denen beide Glieder gleichbezeichnete unendliche Grenzwerthe haben, und von Quotienten $f(x) : g(x)$, in denen Zähler und Nenner entweder beide den Grenzwerth 0, oder beide einen unendlichen Grenzwerth haben. Der a. a. O. miterwähnte Fall über ein Product $f(x) \cdot g(x)$ läſst sich sofort auf den zuletzt genannten zurückführen.

I. Ist der erwähnte Ausdruck $f(x) - g(x)$, $f(x) : g(x)$ eine algebraische Function von x, so existirt bei jedem einseitigen Grenzübergange der unabhängigen Veränderlichen x ein Grenzwerth für ihn. Der Nachweis des allgemeinen Satzes liegt auſserhalb des Rahmens dieser Vorlesungen. Man gelangt dazu durch Umformung des gegebenen Ausdruckes — er sei $F(x)$ und zu betrachten bei $\lim x = a + 0$ — in dem Sinne, dafs für alle $a < x < a + d$ $F(x) = G(x)$ gesetzt werden kann.[8]) Einige Beispiele mögen diesen Gedanken erläutern.

1) Es sei

$$F(x) = \sqrt{x^2 + a} - x,$$

(die Wurzel absolut genommen) und $\lim x = +\infty$. Da für endliche x

$$\sqrt{x^2 + a} - x = \frac{a}{\sqrt{x^2 + a} + x},$$

so folgt nach Nr. 9

$$\lim_{x=+\infty} F(x) = 0.$$

2) $F(x) = \dfrac{x^m - a^m}{x - a}$ für $\lim x = a \pm 0$, wenn m eine ganze positive Zahl bedeutet. Da nach VIII. 1 für $x \gtrless a$

$$\frac{x^m - a^m}{x - a} = x^{m-1}a + x^{m-2}a^2 + \dots + a^{m-1},$$

so ergiebt sich nach Nr. 9 unmittelbar:

$$\text{(a)} \qquad \lim_{x=a} \frac{x^m - a^m}{x - a} = m a^{m-1}.$$

Mittelst dieser Formel kann nach III. in Nr. 9 der Grenzwerth von

$$\left(x^{\frac{m}{n}} - a^{\frac{m}{n}}\right) : (x - a)$$

bei $\lim x = a$ berechnet werden, unter a eine positive und unter m, n ganze positive Zahlen verstanden. Setzt man hier

$$x = y^n \qquad a = b^n,$$

so geht der Ausdruck in

$$(y^m - b^m) : (y^n - b^n)$$

über. Nun folgt aus (a) unmittelbar

$$\lim_{y=b} \frac{y^m - b^m}{y^n - b^n} = \lim_{y=b} \left\{ \frac{y^m - b^m}{y - b} : \frac{y^n - b^n}{y - b} \right\} = \frac{m}{n} b^{m-n}$$

und hieraus durch die Substitution $y = \sqrt[n]{x}$, $b = \sqrt[n]{a}$, indem

$$\lim_{x=a} \sqrt[n]{x} = b$$

nach Nr. 12,

$$\lim_{x=a} \frac{x^{\frac{m}{n}} - a^{\frac{m}{n}}}{x - a} = \frac{m}{n} a^{\frac{m}{n} - 1}.$$

Man hat somit für rationale Werthe von μ die Formel

(b) $$\lim_{x=a} \frac{x^\mu - a^\mu}{x - a} = \mu a^{\mu - 1} \qquad (a > 0);$$

denn sie gilt, wie sich unmittelbar ergiebt, auch für negative μ. — Nimmt man $a = 1$ und setzt $x = 1 + \xi$, so findet man aus (b)

(c) $$\lim_{\xi=0} \frac{(1 + \xi)^\mu - 1}{\xi} = \mu.$$

Bezeichnen $F(x)$, $G(x)$ ganze Functionen von x vom m^{ten} bez. n^{ten} Grade

$$F(x) = x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m, \quad G(x) = x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b^n,$$

so hat man

(3) $$\lim_{x=+\infty} F(x) = +\infty, \quad \lim_{x=-\infty} F(x) = +\infty \text{ oder } -\infty,$$

je nachdem m gerade oder ungerade.

(4) $$\lim_{x=+\infty} [F(x) : G(x)] = +\infty,\ 1,\ 0$$

je nachdem $m >, =, < n$ ist.

Die Formeln ergeben sich unmittelbar durch die Umformungen:

$$F(x) = x^m \left\{1 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_m}{x^m}\right\}, \quad G(x) = x^n \left\{1 + \frac{b_1}{x} + \ldots + \frac{b_n}{x^n}\right\}.$$

Man wird aus den vorstehenden Beispielen entnehmen, dafs es bei Untersuchung eines Functionsquotienten $f(x) : g(x)$ überhaupt von Vortheil sein kann, denselben in folgender Art umzuwandeln:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) : f_1(x)}{g(x) : g_1(x)} \cdot \frac{f_1(x)}{g_1(x)},$$

worin die Functionen $f_1(x)$ und $g_1(x)$ so gewählt sind, dafs bei dem in Betracht gezogenen Grenzübergang von x die Quotienten $f(x) : f_1(x)$, $g(x) : g_1(x)$ je einen von 0 und $\pm\infty$ verschiedenen Grenzwerth besitzen.

II. Ein allgemeines Verfahren, auf die Existenz eines Grenzwerthes z. B. bei $\lim x = a + 0$ zu schliefsen, bietet der folgende Satz dar:

„Gelingt es, zwei Functionen $\Phi(x)$, $\Psi(x)$ zu finden, so dafs für alle $a < x < a + d \quad (d > 0)$

$$\Phi(x) < F(x) < \Psi(x)$$

und es ist
$$\lim \Phi(x) = \lim \Psi(x) = b$$
(endliche Zahl) für $\lim x = a + 0$, so ist auch $\lim F(x) = b$. — Hat man $\Phi(x) < F(x)$ und $\lim \Phi(x) = +\infty$, so ist auch $\lim F(x) = +\infty$, und wenn $F(x) < \Psi(x)$ gefunden ist und $\lim \Psi(x) = -\infty$, so ist auch $\lim F(x) = -\infty$."

Der Beweis ergiebt sich unmittelbar aus der Relation
$$\Phi(x) - b < F(x) - b < \Psi(x) - b.$$
Zu jedem $\varepsilon > 0$ gehört ein $\delta > 0$, so dafs für
$$a < x < a + \delta \qquad | \Phi(x) - b | < \varepsilon$$
und $| \Psi(x) - b | < \varepsilon$, also auch $| F(x) - b | < \varepsilon$ ist. U. s. w.

Nach dieser Methode läfst sich die Formel (c) für beliebige reelle Exponenten μ erweisen. Man hat nach VIII. 8, falls $\mu > 0$
$$1 + \frac{\mu\xi}{1+\xi} < (1+\xi)^\mu < \frac{1}{1-\mu\xi}$$
(wenn nur $\xi < 1 : \mu$, was hier immer angenommen werden darf). Daraus folgt simultan
$$\frac{\mu}{1+\xi} \lesseqgtr \frac{(1+\xi)^\mu - 1}{\xi} \lesseqgtr \frac{\mu}{1-\mu\xi} \qquad \xi \gtrless 0.$$
Da nun
$$\lim_{\xi=0} \frac{\mu}{1+\xi} = \lim_{\xi=0} \frac{\mu}{1-\mu\xi} = \mu,$$
so ergiebt sich

(d) $$\lim_{\xi=0} \frac{(1+\xi)^\mu - 1}{\xi} = \mu.$$

Falls $\mu < 0$, geht man ebenso an der Relation vor:
$$1 + \mu\xi < (1+\xi)^\mu < \frac{1}{1 - \frac{\mu\xi}{1+\xi}}.$$

Durch die Substitution $\xi = \frac{x-a}{a}$ in (d) gelangt man zur analogen Verallgemeinerung von (b).

Ein anderes Beispiel in Nr. 12.

11. Fortsetzung.

III. Satz. „1) Es sei n eine ganze positive Zahl, die unbegrenzt wächst. Wenn die eindeutige Function $\varphi(n)$ von einem Werthe $n = n_1$ an mit n beständig wächst (abnimmt), somit bei $\lim n = +\infty$ nach Nr. 6 einen Grenzwerth hat, der unendlich sein soll, so folgt aus der Existenz des Grenzwerthes

$$\lim_{n=+\infty} \frac{f(n+1)-f(n)}{\varphi(n+1)-\varphi(n)} = K,$$

worin $f(n)$ ebenfalls eine eindeutige Function von n bedeutet, — dafs auch für den Bruch $f(n):\varphi(n)$ ein Grenzwerth bei $\lim n = +\infty$ vorhanden sei und zwar, dafs er gleich K sei."

„2) Derselbe Satz gilt, wenn die eindeutigen Functionen $f(n)$, $\varphi(n)$ für $\lim n = +\infty$ je den Grenzwerth 0 haben und $\varphi(n)$ von $n = n_1$ an mit n beständig wächst (abnimmt).

Beim Beweise genügt es anzunehmen, dafs $\varphi(n)$ mit n beständig wachse und dafs K nicht das Zeichen — habe. Dann sind für den ersten Satz, auf den wir die folgende Entwickelung beschränken, zwei Fälle zu unterscheiden.

a) $K \geqq 0$. Nach Voraussetzung gehört zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl G, derart dafs

$$\left| \frac{f(n+1)-f(n)}{\varphi(n+1)-\varphi(n)} - K \right| < \varepsilon \qquad n > G.$$

Daraus schliefst man, da $\varphi(n+1) > \varphi(n)$,

$$(K-\varepsilon)\,[\varphi(n+1)-\varphi(n)] < f(n+1)-f(n)$$
$$< (K+\varepsilon)\,[\varphi(n+1)-\varphi(n)].$$

Nun sei m eine bestimmte ganze Zahl $> G$, so dafs wir in dieser Relation nach einander $n = m,\ m+1, \ldots m+r-1$ setzen können. Addirt man die so erhaltenen r Ungleichungen, so folgt

$$(K-\varepsilon)\,[\varphi(m+r)-\varphi(m)] < f(m+r)-f(m)$$
$$< (K+\varepsilon)\,[\varphi(m+r)-\varphi(m)]$$

und

$$-\varepsilon[\varphi(m+r)-\varphi(m)] < f(m+r)-f(m)-K[\varphi(m+r)-\varphi(m)]$$
$$< \varepsilon[\varphi(m+r)-\varphi(m)].$$

Da $\varphi(m)$ und $\varphi(m+r)$ als positiv vorausgesetzt werden können, so finden wir noch:

$$-\varepsilon\,\varphi(m+r) < f(m+r)-f(m)-K[\varphi(m+r)-\varphi(m)]$$
$$< \varepsilon\,\varphi(m+r),$$

$$-\varepsilon < \frac{f(m+r)}{\varphi(m+r)} - K - \frac{f(m-K\varphi(m)}{\varphi(m+r)} < \varepsilon.$$

Wie grofs auch die Zahl m sein mag, so läfst sich doch wegen $\lim \varphi(n) = +\infty$ eine Zahl $\varrho > 0$ finden, derart dafs

(a) $$\frac{|f(m) - K\varphi(m)|}{\varphi(m+r)} < \varepsilon \quad \text{für } r > \varrho.$$

Man hat demnach

(b) $$\left|\frac{f(m+r)}{\varphi(m+r)} - K\right| < 2\varepsilon$$

oder $|f(n):\varphi(n) - K| < 2\varepsilon$ für alle $n > m + \varrho$. Nun ist in der That der Zahl 2ε, die jede positive Zahl sein kann, die Zahl $m + \varrho$ zugeordnet, denn zunächst ergiebt sich m aus ε und mittelst m aus ε die Zahl ϱ. Somit hat man

$$\lim f(n):\varphi(n) = K$$

für $\lim n = +\infty$.

b) $K = +\infty$. Es sei $0 < H < H'$. Zufolge Voraussetzung gehört zu $H' > 0$ eine Zahl G' derart, dafs für $n > G'$

$$f(n+1) - f(n) > H'\{\varphi(n+1) - \varphi(n)\},$$

woraus wie oben gefunden wird — $m > G'$ —

(c) $$f(m+r) - f(m) > H'\{\varphi(m+r) - \varphi(m)\}$$

$$\frac{f(m+r)}{\varphi(m+r)} > H' + \frac{f(m) - H'\varphi(m)}{\varphi(m+r)}.$$

Nun läfst sich eine Zahl $\varrho > 0$ angeben, so dafs

$$r > \varrho \qquad |f(m) - H'\varphi(m)| : \varphi(m+r) < H' - H;$$

demnach ist für alle $n > m + \varrho$

$$\frac{f(n)}{\varphi(n)} > H' - (H' - H) = H \quad \text{d. i.} \quad \lim \frac{f(n)}{\varphi(n)} = +\infty.$$

Zugleich sieht man aus (c), dafs $\lim f(n) = +\infty$, so dafs man auch so schliefsen könnte: Nach Satz (a) ist

$$\lim\{\varphi(n):f(n)\} = 0,$$

also, da $\varphi(n):f(n) > 0$,

$$\lim\{f(n):\varphi(n)\} = +\infty.$$

Die vorstehenden Sätze lassen sich auf den Fall ausdehnen, dafs die unabhängige Veränderliche stetig über alle Grenzen wächst.

Satz 1.*). „Es seien zwei eindeutige Functionen $F(x)$, $\Phi(x)$ für jeden endlichen Werth von $x \geqq x_1$ definirt; die erstere sei in jedem Intervalle (x_1, x_2) — $x_2 > x_1$ — endlich, während die letztere von $x = x_1$ an mit x zugleich beständig wächst (abnimmt) und daher bei $\lim x = +\infty$ einen Grenzwerth hat, der unendlich sein soll. Dann folgt aus der Existenz des Grenzwerthes

$$\lim_{x=+\infty} \frac{F(x+h) - F(x)}{\Phi(x+h) - \Phi(x)} = K,$$

worin h eine von 0 verschiedene Constante bedeutet, — dafs auch $F(x) : \Phi(x)$ bei $\lim x = +\infty$ einen Grenzwerth, und zwar gerade K, besitzt.“

2.*) „Derselbe Satz gilt, wenn $F(x)$ und $\Phi(x)$ für $\lim x = +\infty$ beide dem Grenzwerthe 0 sich nähern und $\Phi(x)$ von $x = x_1$ an mit x beständig wächst (abnimmt).“ [9])

Der Beweis läfst sich mit Hilfe der oben gegebenen Entwickelung liefern, wobei wir annehmen können, dafs $\Phi(x)$ mit x beständig zunehme, K nicht das Vorzeichen — habe und $h > 0$ sei. Es sei x_0 eine beliebige Zahl: $h > x_0 \geqq 0$. Man setze

$$f(n) = F(x_0 + nh) \qquad \varphi(n) = \Phi(x_0 + nh).$$

Beschränken wir uns wieder auf den ersteren Satz, wobei es auch genügen wird, den Fall eines endlichen K näher zu betrachten. Wir finden sofort aus Satz 1., dafs

$$\lim_{n=+\infty} \frac{F(x_0 + nh)}{\Phi(x_0 + nh)} = K;$$

was aber nicht völlig ausreichen würde, um die Formel

$$\lim_{x=+\infty} \frac{F(x)}{\Phi(x)} = K$$

als richtig hinzustellen. Man hat vielmehr noch Folgendes hinzuzufügen. Nach Voraussetzung gehört zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $G > 0$, derart dafs

$$\text{(d)} \qquad \left| \frac{F(x+h) - F(x)}{\Phi(x+h) - \Phi(x)} - K \right| < \varepsilon \qquad \text{für } x > G.$$

Für $x = x_0 + nh$ ergiebt sich hieraus

$$\left|\frac{f(n+1) - f(n)}{\varphi(n+1) - \varphi(n)} - K\right| < \varepsilon,$$

wenn $x_0 + nh > G$, also was auch x_0 weiter sein mag, wenn $k > G : h$. Wir wählen nun die ganze Zahl $m > G : h$ und die in (a) vorkommende Zahl ϱ folgendermaſsen. $f(m)$ nimmt, während x_0 das Intervall $(0, h)$ durchläuft, die Werthe $F(mh)$ bis $F(mh + h)$ an, welche nach Voraussetzung sämmtlich zwischen zwei endlichen Zahlen A_m, B_m liegen:

$$A_m < f(m) < B_m.$$

Somit ist wegen

$$\Phi(mh + h) > \varphi(m) \geqq \Phi(mh)$$

$$A_m - K\Phi(mh + h) < f(m) - K\varphi(m) < B_m - K\Phi(mh).$$

Bezeichnet man mit P den gröſseren der absoluten Beträge der äuſseren, von x_0 unabhängigen Glieder dieser Ungleichung, so ist

$$\frac{|f(m) - K\varphi(m)|}{\varphi(m+r)} < \frac{P}{\Phi(mh + rh)}.$$

Wählen wir nun die Zahl $\varrho > 0$ so, daſs für

(e) $$r > \varrho \qquad 0 < \frac{P}{\Phi(mh + rh)} < \varepsilon;$$

so folgt zunächst wieder (b) d. i.

$$\left|\frac{f(n)}{\varphi(n)} - K\right| < 2\varepsilon \quad \text{für } n > m + \varrho.$$

Aber es ist auch

(f) $$\left|\frac{F(x)}{\Phi(x)} - K\right| < 2\varepsilon,$$

wenn nur $x > h(m + \varrho + 1)$. Ist nämlich x' ein Werth über der Zahl $h(m + \varrho + 1)$, und man setzt

$$x' = kh + x_0 \qquad (0 \leqq x_0 < h)$$

so muſs die ganze Zahl $k > m + \varrho$ sein. Da nun durch ε vermöge (d) die Zahl G, hierauf m durch die Forderung $m > G : h$, und endlich ϱ vermöge (e) durch ε und m bestimmt ist; so haben wir in (f) der beliebigen Zahl $2\varepsilon > 0$

die Zahl $h(m+\varrho+1)$ zugeordnet. Nun erst sind wir berechtigt, die Formel anzusetzen:

$$\lim_{x=+\infty}\frac{F(x)}{\Phi(x)}=K.$$

Das vorstehende Beispiel ist besonders geeignet zu zeigen, mit welcher Vorsicht man zu Werke zu gehen hat, um die Existenz eines Grenzwerthes mit Sicherheit nachzuweisen.

Anwendung des Satzes 1*. Handelt es sich um Untersuchung des Quotienten $\log x : x$ bei $\lim x=+\infty$, so setze man

$$F(x)=\log x,\qquad \Phi(x)=x.$$

Da nun

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{\Phi(x+h)-\Phi(x)}=\frac{1}{h}\log\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

für $\lim x=+\infty$, wie bald ersichtlich werden wird, den Grenzwerth 0 hat, so folgt, daſs auch $\log x : x$ bei $\lim x=+\infty$ einen Grenzwerth hat. Und zwar ist

$$\lim_{x=+\infty}\frac{\log x}{x}=0. \tag{g}$$

Man kann diese wichtige Formel auch durch einfachere Betrachtungen ableiten. Sie ist nämlich identisch mit der folgenden:

$$\lim_{x=+\infty}\frac{a^x}{x}=+\infty\quad(a>1). \tag{h}$$

Läſst man x zunächst eine natürliche Zahl n sein, so hat man $(a=1+d)$

$$a^n>1+nd+\frac{n(n-1)}{2}d^2,\qquad \frac{a^n}{n}>\frac{n-1}{2}d^2,$$

woraus folgt

$$\lim_{n=+\infty}\frac{a^n}{n}=+\infty.$$

Und ist $n\leqq x<n+1$, so hat man

$$\frac{a^x}{x}>\frac{a^n}{n+1}=\frac{a^n}{n}:\left(1+\frac{1}{n}\right)>\frac{m}{m+1}\cdot\frac{a^n}{n},$$

wenn $n>m\geqq 1$. Nach dem Vorstehenden gehört zu jeder Zahl $G>0$ eine Zahl $\mu>0$, so daſs für $n>\mu$

$$\frac{m}{m+1}\,\frac{a^n}{n}>G,$$

so daſs für alle $x\geqq\mu+1$ $\quad\dfrac{a^x}{x}>G.$

Aus (h) ergiebt sich nach Nr. 9. III. wegen

$$\frac{a^x}{x^\mu} = \left\{\frac{\left(a^{\frac{1}{\mu}}\right)^x}{x}\right\}^\mu$$

$$\lim_{x=+\infty} \frac{a^x}{x^\mu} = +\infty \quad (a > 1, \quad \mu > 0). \tag{i}$$

Aus (g) leitet man durch die Substitution $x = \frac{1}{y}$ ab:

$$\lim_{y=+0} y \log y = 0. \tag{k}$$

12. Stetige Functionen.

Definition: Die eindeutige Function $f(x)$, definirt für alle Werthe x eines Intervalles $(a - d, a + d)$ — $d > 0$ —, heifst für den endlichen Werth $x = a$ stetig, wenn bei stetigem Grenzübergange

$$\lim x = a \pm 0 \quad \lim f(x) = f(a),$$

d. h. zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ mufs eine Zahl $\delta > 0$ gehören, derart dafs

(1) $$|f(x) - f(a)| < \varepsilon,$$

wenn nur $|x - a| < \delta$.[10])

Es ist somit eine Vorbedingung der Stetigkeit von $f(x)$ für $x = a$, dafs $f(x)$ für $x = a$ definirt sei. Unstetig ist $f(x)$ für den Werth $x = a$ entweder, wenn die Function für $x = a$ nicht definirt ist (vgl. Nr. 4) oder im Falle dafs $f(a)$ festgesetzt ist, wenn $f(x)$ bei $\lim x = a + 0$ oder $a - 0$ keinen Grenzwerth oder einen solchen besitzt, der von $f(a)$ verschieden ist. Unstetig für $x = a$ ist $f(x)$ also stets, wenn $\lim f(x)$ bei $\lim x = a + 0$ oder $a - 0$ unendlich ist.[11]) Man pflegt jedoch, falls wenigstens für

$$\lim x = a + 0 \ (a - 0) \quad \lim f(x) = f(a),$$

die Function $f(x)$ als stetig auf einer Seite des Werthes $x = a$ zu bezeichnen. — Die hier erwähnten Grenzübergänge von x sind sämmtlich als stetige zu verstehen. Insbesondere beachte man, dafs die Stetigkeit von $f(x)$ für $x = a$ erheischt, dafs die Relation (1) bestehe für alle Werthe von x im Intervalle $(a - \delta, a + \delta)$, nicht etwa blofs für einen

Theil derselben. — Man kann $f(x)$ für $x = \infty$ (Nr. 4) stetig nennen, wenn $f(\infty)$ endlich und bei stetigem Grenzübergange

$$\lim x = \infty \qquad \lim (fx) = f(\infty)$$

ist.

Aus den Sätzen I. III. in Nr. 9 ergeben sich unmittelbar die folgenden:

„Ist $f(x)$ für $x = a$ stetig, so auch die Functionen $f(x) + k$, $kf(x)$. Die Function $1 : f(x)$ ist für $x = a$ dann und nur dann stetig, wenn $f(a)$ nicht Null ist."

„Ist auch $g(x)$ für $x = a$ stetig, so sind die Functionen $f(x) + g(x)$, $f(x)\,g(x)$ ebenfalls für $x = a$ stetig; die Function $g(x) : f(x)$ dann und nur dann, wenn $f(a)$ nicht Null ist."

Allgemein: „Jede rationale Function $R(y_1, y_2 \ldots y_m)$, worin für y_r eine für $x = a$ stetige Function $f_r(x)$ eingesetzt wird ($r = 1, 2 \ldots m$), ist selbst eine für $x = a$ stetige Function von x, wenn ihr Nenner durch die Substitution $y_r = f_r(a)$ nicht Null wird." — Insbesondere ist eine ganze rationale Function von x für jeden endlichen Werth des Argumentes stetig, eine gebrochene rationale Function von x sicher für jeden solchen Werth von x, durch den ihr Nenner nicht Null wird.

„Wenn $f(x)$ für $x = a$ stetig ist und $\varphi(y)$ für den Werth $y = f(a)$ ebenfalls stetig ist, so ist auch die Function $\varphi\{f(x)\}$ für $x = a$ stetig."

Wir bemerken ferner noch die speciellen Sätze:

1) Die Exponential-Function a^x ist für jeden endlichen Werth $x = x_0$ stetig. Es genügt $a > 1$ vorauszusetzen. Zunächst hat man

$$a^{x_0 + \xi} - a^{x_0} = a^{x_0}(a^{\xi} - 1).$$

Nach VIII. 8 bestehen simultan die Relationen ($a = 1 + d$):

$$\xi \gtrless 0 \quad (1 + d)^{\xi} \lesseqgtr \frac{1}{1 - \xi d},$$

so dafs

$$(1 + d)^{\xi} - 1 \lesseqgtr \frac{\xi d}{1 - \xi d}$$

und

$$|(1 + d)^{\xi} - 1| < \frac{d \cdot |\xi|}{1 - d \cdot |\xi|}.$$

Man hat somit

$$|a^{x_0+\xi} - a^{x_0}| < \varepsilon;$$

wenn

$$\frac{d\,|\xi|}{1 - d\,|\xi|} < \frac{\varepsilon}{a^{x_0}} \quad \text{d. i.} \quad |\xi| < \frac{\varepsilon}{d(a^{x_0} + \varepsilon)}.$$

2) Die logarithmische Function ${}^B\log x$ ist für jeden positiven Werth $x = x_0$ stetig. Man hat

$${}^B\log(x_0 + \xi) - {}^B\log x_0 = {}^B\log\left(1 + \frac{\xi}{x_0}\right).$$

Setzt man, wenn $\xi > 0$,

$$\frac{\xi}{x_0} < B^\varepsilon - 1;$$

wenn $\xi < 0$,

$$\frac{\xi}{x_0} > B^{-\varepsilon} - 1$$

voraus, so ergiebt sich immer

$$|{}^B\log(x_0 + \xi) - {}^B\log x_0| < \varepsilon.$$

3) Die Potenzfunction x^μ, wo μ keine ganze Zahl sein soll, ist für jeden positiven Werth von x stetig und falls $\mu > 0$ auch für $x = 0$. Letzteres zufolge Nr. 5. Für $x > 0$ braucht man nur zu setzen:

$$x^\mu = B^{\mu \log x}.$$

Bei Bestimmung von Grenzwerthen wird oft der aus Nr. 9. III. abzuleitende Satz gebraucht: „Es sei die eindeutige Function $\varphi(y)$ für den endlichen Werth $y = b$ stetig und bei irgend einem Grenzübergange von x $\lim f(x) = b$, so ist bei ebendemselben

$$\lim \varphi\{f(x)\} = \varphi(b).\text{“}$$

Anwendungen des letzten Satzes.

1) Mit Hilfe desselben können wir den Grenzwerth $b = \lim\limits_{n=+\infty} f_n$ im Beispiele zu Nr. 6 bestimmen. Da

$$f_{n+1} = \sqrt{a + f_n}$$

und $\sqrt{a + y}$ für $y = b$ stetig ist, so folgt aus dieser Gleichung bei $\lim n = +\infty$

$$b = \sqrt{a + b} \quad \text{d. i.} \quad b^2 = a + b, \quad (b - \tfrac{1}{2})^2 = a + \tfrac{1}{4}.$$

Man erhält somit, da b positiv sein mufs,

$$b = \tfrac{1}{2} + \sqrt{a + \tfrac{1}{4}}.$$

2) Über das Verhalten der Function $f(x)^{\varphi(x)}$ bei irgend einem Grenzübergange der unabhängigen Veränderlichen x, bei welchem beide Functionen $f(x)$, $\varphi(x)$ Grenzwerthe haben, kann man Folgendes bemerken. Setzt man

$$f(x)^{\varphi(x)} = B^{\varphi(x) \log f(x)} \qquad (B > 1),$$

so ergiebt sich aus der Stetigkeit der Exponentialfunction B^y für jeden endlichen Werth von y, dafs wenn

$$\lim \varphi(x)\, {}^B\!\log f(x)$$

eine endliche Zahl b ist,

$$\lim f(x)^{\varphi(x)} = B^b.$$

Und wenn

$$\lim \varphi(x)\, {}^B\!\log f(x) = +\infty\, (-\infty),$$

so hat man nach Nr. 9. III.

$$\lim f(x)^{\varphi(x)} = +\infty\, (0).$$

Nach Nr. 9 hat das Product $\varphi(x) \log f(x)$ stets einen Grenzwerth, wenn nicht der eine der Factoren den Grenzwerth 0, der andere den Grenzwerth $+\infty$ oder $-\infty$ besitzt. Das Verhalten der Function $f(x)^{\varphi(x)}$ bei dem in Rede stehenden Grenzübergange von x wird daher Gegenstand einer besonderen Untersuchung sein müssen, wenn

(1) $\lim f(x) = 1, \quad \lim \varphi(x)$ unendlich;

(2) $\lim f(x) = +\infty, \quad \lim \varphi(x) = 0;$

(3) $\lim f(x) = +0, \quad \lim \varphi(x) = 0.$

Z. B. Aus

$$x^x = e^{x\, l x}$$

folgt nach der Formel (k) in Nr. 12, dafs

$$\lim_{x=+0} x^x = 1.$$

Der Grenzwerth von f^φ ist aber im 3. Falle nicht immer 1, wie schon das Beispiel

$$x^{\frac{1}{lx}} = e, \quad \lim_{x=+0} x^{\frac{1}{lx}} = e$$

zeigt.

Eine der wichtigsten der hier berührten Untersuchungen ist in der Formel enthalten

$$\lim_{x=\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e, \tag{l}$$

wo e wie gewöhnlich die Basis der natürlichen Logarithmen bedeutet. Wir erinnern zuerst an die aus VII. 5 folgende Formel

$$\lim_{x=+\infty}\varphi_n = e,$$

$$\varphi_n = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}, \tag{m}$$

wo n eine natürliche Zahl. Man hat nach VIII. 3

$$\psi_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+n\cdot\frac{1}{n}+n_2\cdot\frac{1}{n^2}+\ldots+n_n\cdot\frac{1}{n^n}$$

$$= 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots$$

$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right),$$

woraus sofort folgt

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \varphi_n. \tag{n}$$

Da ferner für $r = 3, 4, \ldots n$ (vgl. X. 12)

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{r-1}{n}\right)$$

$$> 1-\frac{1}{n}\left\{1+2+\ldots+r-1\right\} = 1-\frac{(r-1)\,r}{2n},$$

so ergiebt sich

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

$$+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{2\cdot 3}{2n}\right)+\ldots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{(n-1)\,n}{2n}\right)$$

d. h.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > \varphi_n-\frac{1}{2n}\,\varphi_{n-2} > \varphi_n\left(1-\frac{1}{2n}\right). \tag{o}$$

Aus den Formeln (m) bis (o) schliefst man nach Nr. 10, II. die Formel

$$\lim_{n=+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e. \tag{p}$$

Lassen wir nun x den stetigen Grenzübergang

$$\lim x = +\infty$$

ausführen. Ist x so gewählt dafs

$$n \leqq x < n + 1,$$

somit

$$1 + \frac{1}{n} \geqq 1 + \frac{1}{x} > 1 + \frac{1}{n+1},$$

so folgt

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} > \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n},$$

d. i.

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right) \psi_n > \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} > \psi_{n+1} : \left(1 + \frac{1}{n+1}\right).$$

Nach (p) haben das erste und dritte Glied dieser Relation, kurz mit f_n und g_n bezeichnet, bei $\lim n = +\infty$ den Grenzwerth e d. h. zu $\varepsilon > 0$ gehört eine Zahl $\mu > 0$, sodafs für alle Werthe $n > \mu$ sowohl $|f_n - e| < \varepsilon$, als auch $|g_n - e| < \varepsilon$. Daher ist für alle Werthe $x > \mu + 1$

$$\left|\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} - e\right| < \varepsilon,$$

oder

$$\lim_{x=+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = e. \tag{q}$$

Endlich sei $\lim x = -\infty$, wobei $x < -1$ anzunehmen ist. Setzt man $x = -x'$, so ergiebt sich

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = \left(1 - \frac{1}{x'}\right)^{-x'} = \left(1 + \frac{1}{x'-1}\right)^{x'}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{x'-1}\right)^{x'-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{x'-1}\right);$$

somit nach (q) bei $\lim x' = +\infty$

$$\lim_{x=-\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = e,$$

womit die vorgelegte Formel vollständig erwiesen ist.

Aus (l) ergiebt sich für $x = 1 : y$

$$\lim_{y=\pm 0} (1 + y)^{\frac{1}{y}} = e,$$

und wenn man den Logarithmus nimmt

$$\lim_{y=0} \frac{{}^B\log(1+y)}{y} = {}^B\log e = M, \tag{r}$$

worin M der Modulus des Logarithmensystemes. Insbesondere hat man

$$\lim_{y=0} \frac{l(1+y)}{y} = 1. \tag{s}$$

13. Wenn eine für alle Werthe von x im endlichen Intervalle (a, b) — $a \leqq x \leqq b$ — eindeutig definirte Function $f(x)$ auch für jeden derselben stetig ist und $f(a)$, $f(b)$ ungleich sind, so giebt es mindestens einen Werth 0 zwischen a und b derart, dafs $f(c)$ gleich ist einem gegebenen Werthe h zwischen $f(a)$ und $f(b)$. — An den Grenzen a, b braucht die Stetigkeit von $f(x)$ nur einseitig zu sein. — Der Satz ergiebt sich aus dem folgenden besonderen Falle desselben.

Ist $f(x)$ für alle Werthe $a \leqq x \leqq b$ eindeutig und stetig, und die Werthe $f(a)$ und $f(b)$ haben entgegengesetzte Vorzeichen, so giebt es wenigstens einen Werth c innerhalb des Intervalles (a, b): $a < c < b$, wofür $f(c) = 0$.[12])

Beweis. Es sei $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. Wegen der Stetigkeit von $f(x)$ für $x = a$ gehört zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta > 0$ derart, dass für alle $a < x < a + \delta$

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon,$$

also

$$f(x) < f(a) + \varepsilon.$$

Wählt man hier $\varepsilon < -f(a)$, so folgt dafs $f(x) < 0$ für alle $a < x < a + \delta$. Man kann somit eine Veränderliche x' durch die Forderung definiren, dafs für alle $x < x'$ $f(x) < 0$ sei. x' mufs eine obere Grenze $c > a$ haben, wofür ebenfalls die Relation gilt:

$$x < c \qquad f(x) < 0. \tag{1}$$

Das ist selbstverständlich, wenn x' den Werth c erreicht. Will man diese Annahme nicht machen, so mufs man doch zugeben, dafs innerhalb eines jeden Intervalles (x_1, c) — $x_1 < c$ — mindestens ein Werth x_1' von x' liege; sodafs $f(x) < 0$ für $x < x_1'$. Also ist $f(x_1) < 0$ wenn nur $x_1 < c$.

Wir sagen nun, $f(c)$ kann weder eine negative, noch eine positive Zahl sein. Wäre $f(c) < 0$, so gäbe es nach dem oben Bemerkten noch Werthe $x' > c$, also könnte c nicht die obere Grenze von x' sein. Wäre aber $f(c) > 0$, so müfsten Werthe von $x < c$ vorhanden sein, so dafs $f(x) > 0$. Denn wegen der Stetigkeit von $f(x)$ für $x = c$ gehört zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta > 0$, derart, dafs $f(x) > f(c) - \varepsilon$ für $c - \delta < x < c$; nimmt man nun $\varepsilon < f(c)$, so würde für alle die genannten x $f(x) > 0$ sein, gegen (1). Somit mufs $f(c) = 0$ und daher $c < b$ sein.

In ähnlicher Weise würde man, von $f(b)$ ausgehend, auf einen Werth $d \geqq c$ gestofsen sein, wofür $f(d) = 0$; während für $b \geqq x > d$ $f(x) > 0$. Ist $d = c$, so giebt es im Intervalle (a, b) nur eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$.

Der Eingangs erwähnte Satz folgt durch Anwendung des vorstehenden auf die Function $f(x) - h$, wo h irgend eine zwischen $f(a)$ und $f(b)$ gelegene Zahl bedeutet, so dafs simultan

$$f(a) - h \lesseqgtr 0, \qquad f(b) - h \gtreqless 0.$$

Demnach existirt innerhalb des Intervalles (a, b) sicher ein Werth c, wofür $f(c) - h = 0$.

Die in diesem Satze ausgesprochene Eigenschaft kommt jedoch keineswegs ausschliefslich solchen Functionen zu, die für alle Werthe des Intervalles (a, b) stetig sind, — so dafs sie nicht als Definition derselben aufgestellt werden könnte.

Anmerkung. Aus dem speciellen Satze ergiebt sich zufolge Nr. 10, I. unmittelbar, dafs jede algebraische Gleichung

$$F(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

von ungeradem Grade mindestens eine reelle Auflösung $x = c$ haben mufs. Denn es ist

$$F(G) > 0, \qquad F(-G) < 0,$$

wenn nur die positive Zahl G hinlänglich grofs angenommen wird.

14. Die umgekehrte Function.

Satz. „Wenn $x = f(y)$ für alle Werthe von y des endlichen Intervalles (c, d) — $c < d$ — stetig ist und bei wachsendem y stets zunimmt (abnimmt), so hat die Gleichung $x = f(y)$ für alle x im Intervalle $(f(c), f(d))$ eine und nur eine Wurzel, so daſs für den erwähnten Bereich von x eine eindeutige Function $y = \varphi(x)$ existirt, welche der Gleichung $x = f(y)$ Genüge leistet. Diese Function, gewöhnlich die umgekehrte gegenüber der Function $f(y)$ genannt, ist für alle Werthe x im Intervalle $(f(c), f(d))$ stetig und nimmt bei wachsendem x entweder beständig zu oder beständig ab.“

Zusatz. Ist $\lim f(y) = +\infty(-\infty)$ für $\lim y = d - 0$, während $f(y)$ in jedem Intervalle (c, d') — $c < d' < d$ — die angegebenen Eigenschaften besitzt, so ist $\lim \varphi(x) = d$ für $\lim x = +\infty\ (-\infty)$.

Beweis. Es sei $f(c) = a$, $f(d) = b$ und $b > a$. Ferners wird angenommen, falls $c \leqq y' < y'' \leqq d$, $f(y') < f(y'')$. Daraus folgt unmittelbar, daſs die Gleichung $x = f(y)$ — $a < x < b$ — nur eine Wurzel y zwischen den Grenzen (c, d) haben kann. Daſs aber eine solche existirt, verbürgt der Satz von Nr. 13. Nun ist zu zeigen, daſs für alle $a < x < b$ $\varphi(x)$ stetig ist; an den Grenzen $x = a$, $x = b$ zum mindesten einseitig. Es sei $a < x_0 < b$, $x_0 = f(y_0)$ und $\varepsilon > 0$ vorgelegt, jedoch so klein angenommen, daſs das Intervall $(y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ nicht zum Theil auſserhalb (c, d) fällt. Ferner sei $x_0 - \delta_1 = f(y_0 - \varepsilon)$, $x_0 + \delta_2 = f(y_0 + \varepsilon)$, worin δ_1 δ_2 positive Zahlen bedeuten, von denen δ die kleinere sei. Giebt man x irgend einen Werth des Intervalles $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, so muſs die ihm entsprechende Lösung der Gleichung $x = f(y)$ zwischen $y_0 - \varepsilon$ und $y_0 + \varepsilon$ liegen. D. i. es ist $|y - y_0| < \varepsilon$ für alle x, wofür $|x - x_0| < \delta$. — Auf ähnliche Art wird der Zusatz erwiesen.

Vermöge des vorstehenden Satzes erhellt sofort, daſs die im VIII. Abschnitte betrachteten Gleichungen

$$x = y^m\ (m > 0), \qquad x = B^y\ (B > 1),$$

in welchem die rechte Seite mit y beständig wächst, und zwar von 0 bis $+\infty$ (in der ersten, wenn y von 0 zu $+\infty$; in der zweiten, wenn y von $-\infty$ zu $+\infty$ übergeht), eindeutige und für alle positiven Werthe von x stetige Functionen

$$y = \sqrt[m]{x}, \qquad y = {}^{B}\log x$$

als Umkehrungen bezüglich der Potenz mit ganzen positiven Exponenten und der Exponentialfunction bestimmen — Sätze, die in den vorhergehenden Nummern durch besondere Beweise gezeigt worden sind.

15. Satz. „Ist $f(x)$ eindeutig definirt und stetig für alle Werthe $a \leqq x \leqq b$, so hat die Veränderliche $f(x)$ eine endliche obere Grenze g und eine endliche untere Grenze k. Es giebt ferner mindestens einen Werth c — $a \leqq c \leqq b$ —, wofür $f(c) = g$ und mindestens einen Werth d — $a \leqq d \leqq b$ —, wofür $f(d) = k$." Oder: Jede im Intervalle (a, b) mit Einschlufs der Grenzen stetige Function erreicht sowol ihre obere, als auch ihre untere Grenze: sie hat einen gröfsten und einen kleinsten Werth.[13])

Der Beweis dieses wichtigen Satzes stützt sich auf den folgenden

Hilfssatz. „Ist $y = f(x)$ eindeutig definirt für unendlich viele Werthe von x in dem endlichen Intervalle (a, b) und g die obere Grenze von $f(x)$, so existirt mindestens ein Werth c — $a \leqq c \leqq b$ —, derart, dafs in jedem Intervalle $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ — $\varepsilon > 0$ — die obere Grenze von $f(x)$ g ist." — Ein ähnlicher Satz gilt für die untere Grenze von $f(x)$.

Beweis. Wir bemerken zunächst, dafs die obere Grenze g' von $f(x)$ für die Werthe von x in irgend einem Intervalle (a', b'), das innerhalb (a, b) liegt, nicht gröfser als g sein kann, g und g' als endlich vorausgesetzt, und dafs, wenn $g' = +\infty$ ist, auch $g = +\infty$ sein mufs. Das folgt aus dem Begriffe der oberen Grenze unmittelbar. Wäre im ersten Falle $g' > g$, so gäbe es im Intervalle (a, b) Werthe x', wofür $f(x') > g' - \varepsilon$ d. i. $f(x') > g$, so dafs g nicht obere Grenze für die $f(x)$ im Intervalle (a, b) von x sein könnte. — Ebenso einfach folgt, dafs wenn das Intervall (a, b) durch Einschaltung eines Werthes h — $a < h < b$ — in zwei (a, h), (h, b) getheilt wird, die obere Grenze von $f(x)$ mindestens für die in eines dieser Intervalle fallenden Werthe von x wieder g sein mufs. Ist g eine endliche Zahl, so müssen auch die oberen Grenzen g_1, g_2 von $f(x)$ in den Intervallen von x (a, h), bez. (h, b) endlich sein und umgekehrt. Ist dann $g_1 = g_2$, so ist g ihnen gleich, sonst aber ist g die gröfsere der beiden Zahlen. In der That, wenn z. B. $g_1 \geqq g_2$, so hat man ja für $a \leqq x \leqq b$ $f(x) \leqq g_1$, aber zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ mindestens ein x' in (a, b), wofür $f(x') > g_1 - \varepsilon$. Ist g aber $+\infty$, so mufs, nach dem gerade Bemerkten, mindestens eine der oberen Grenzen g_1, g_2 $+\infty$ sein.

Dieses vorausgesetzt, theilen wir das Intervall $b - a = D$ in $e\,(\geqq 2)$ gleiche Theile. Sodann mufs mindestens für die Werthe von x in einem der Intervalle

$$\left(a,\ a + \frac{D}{e}\right),\ \left(a + \frac{D}{e},\ a + \frac{2D}{e}\right) \ldots \left(a + \frac{(e-1)D}{e},\ b\right)$$

die obere Grenze von $f(x)$ wieder g sein. Es sei

$$\left(a + \frac{c_1 D}{e},\ a + \frac{(c_1 + 1)D}{e}\right) \qquad (0 \leqq c_1 \leqq e - 1)$$

das erste unter den genannten Intervallen, das diese Eigenschaft besitzt. Wir theilen dasselbe in e gleiche Theile und finden wieder ein erstes Intervall

$$\left[a + \left(\frac{c_1}{e} + \frac{c_2}{e}\right) D, \qquad a + \left(\frac{c_1}{e} + \frac{c_2 + 1}{e^2}\right) D\right],$$

$$(0 \leqq c_2 \leqq e - 1),$$

derart, dafs für die in demselben vorkommenden Werthe von x die obere Grenze von $f(x)$ g ist. U. s. f. Auf diese Weise gelangen wir zu einer Zahl

$$c = a + D \cdot (S_n), \qquad S_n = \frac{c_1}{e} + \frac{c_2}{e^2} + \ldots + \frac{c_n}{e^n},$$

$$(0 \leqq c_n \leqq e - 1),$$

welche die Eigenschaft hat, dafs für die in jedes Intervall

$$\left[a + S_n D, \qquad a + \left(S_n + \frac{1}{e^n}\right) D\right]$$

fallenden Werthe von x die obere Grenze von $f(x)$ stets g ist. Nimmt man n so grofs dafs

$$D : e^n < \varepsilon,$$

so folgt

$$c-\varepsilon < a + S_n D < c \leqq a + \left(S_n + \frac{1}{e^n}\right) D < c + \varepsilon.$$

Und es ist im Intervalle von x $(c-\varepsilon,\ c+\varepsilon)$ die obere Grenze von $f(x)$ auch g. Wenn $g = +\infty$, so erhellt dies unmittelbar. Ist g endlich, so kann die zuletzt erwähnte obere Grenze weder kleiner, noch gröſser als g sein, ist also g selbst.

Mit Hilfe des vorstehenden Satzes ergiebt sich nun zunächst, daſs die obere (untere) Grenze g der für alle

$$a \leqq x \leqq b$$

stetigen Function $f(x)$ endlich ist. Denn wäre $g = +\infty$, so müſste es mindestens einen Werth $a \leqq c \leqq b$ geben, derart, daſs in jedem Intervalle $(c-\varepsilon,\ c+\varepsilon)$ die obere Grenze von $f(x)$ $+\infty$ ist. Aus der Stetigkeit von $f(x)$ für $x = c$ folgt aber, daſs bei gegebenem $\varepsilon' > 0$ ein $\delta' > 0$ existirt, sodaſs $|f(x) - f(c)| < \varepsilon'$, wenn nur $|x - c| < \delta'$. Also kann g nicht $+\infty$ sein. — Die soeben gemachte Bemerkung ist keineswegs selbstverständlich. Wenn auch $f(x)$ für jedes x $(a \leqq x \leqq b)$ einen endlichen Werth hat, so braucht g nicht endlich zu sein. Z. B. Es sei $f(x)$ in folgender Weise definirt

$$f(a) = 0, \qquad (a < x \leqq b), \qquad f(x) = \frac{1}{x-a}.$$

Wir finden endlich, daſs $f(c) = g$ sein muſs. Denn im Intervalle $(c-\delta',\ c+\delta')$ giebt es mindestens einen Werth x', wofür

$$g \geqq f(x') > g - \varepsilon'.$$

Daneben ist

$$|f(x') - f(c)| < \varepsilon',$$

somit

$$|g - f(c)| < 2\varepsilon',$$

also

$$g = f(c)$$

nach VII. 7.

Als Anwendung möge der zur Beurtheilung des Sinnes, in welchem eine für $a \leqq x \leqq b$ stetige Function $f(x)$ sich ändert, oft unentbehrliche Satz dienen: „Wenn für alle $a \leqq x < b$ eine positive Zahl $\varDelta(x)$ existirt, so dafs für

$$0 < \xi < \varDelta(x) \qquad f(x+\xi) - f(x) \gtrless 0,$$

so ist entsprechend

$$f(b) \gtrless f(a).\text{“}$$

Die Function

$$\varphi(x) = f(x) - f(a),$$

wofür $\varphi(a) = 0$, ist zugleich mit $f(x)$ stetig, hat im Falle des oberen Zeichens eine obere Grenze $\gamma > 0$ und erreicht sie für einen Werth $x = c$. Wäre $a < c < b$, so müfste

$$\varphi(c+\xi) \leqq \varphi(c) \quad (\xi > 0),$$

also

$$f(c+\xi) \leqq f(c)$$

sein, gegen die Voraussetzung. Demnach mufs $c = b$ und $f(b) - f(a) = \gamma > 0$ sein.

16. Satz. „Ist $f(x)$ eindeutig und stetig für alle Werthe des Intervalles (a, b), die Grenzen $x = a$ und $x = b$ eingeschlossen, so kann jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta_0 > 0$ derart zugeordnet werden, dafs $|f(x') - f(x'')|$ stets kleiner als ε ist, wenn nur x', x'' Werthe im Intervalle (a, b) bezeichnen, deren Unterschied dem absoluten Betrage nach kleiner als δ_0 ist.“[14])

Beweis. Gemäfs Voraussetzung gehört zu $\frac{1}{2}\varepsilon$ eine Zahl $\delta > 0$ derart, dafs $|f(x') - f(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon$ für alle Werthe x', genügend der Relation $|x' - x| < \delta$. Dabei kann x jeder Werth: $a \leqq x \leqq b$ sein. Ist nun x'' ein zweiter Werth, wofür $|x'' - x| < \delta$, so ergiebt sich $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$. Innerhalb des Intervalles $(x - \delta,\ x + \delta)$ ist somit die Schwankung von $f(x)$, d. i. der Unterschied ihrer oberen und unteren Grenze, kleiner als ε. Definirt man ferner eine Veränderliche $\xi > 0$ durch die Bedingung, dafs die Schwankung von $f(x)$ innerhalb des Intervalles $(x - \xi,\ x + \xi)$ unter ε liegen soll, so hat sie eine obere Grenze $\varDelta(x) > 0$, von der nach einem in Nr. 13 angegebenen Verfahren gezeigt werden kann, dafs im Intervalle $(x - \varDelta(x),\ x + \varDelta(x))$ die Schwankung ebenfalls noch kleiner als ε ist. Ist $\xi > \varDelta x$ so mufs in dem Intervalle $(x - \xi,\ x + \xi)$ die Schwankung von $f(x)$ die Zahl ε übersteigen. — Auf diese Weise ist für alle Werthe $a \leqq x \leqq b$ eine Function $\varDelta(x)$ eindeutig definirt, die überall positiv ist. Ihre untere Grenze $\varDelta_0$ kann $\geqq 0$ sein. Wenn sich aber nachweisen läfst, dafs $\varDelta(x)$ für alle soeben erwähnten Werthe von x stetig ist, so mufs $\varDelta_0 > 0$ sein; denn es giebt nach Nr. 15 einen Werth d im Intervalle (a, b), wofür $\varDelta(d) = \varDelta_0$. — Wenn man x', x'' beliebig im Intervalle (a, b) wählt, nur so, dafs

$$|x' - x''| < \varDelta_0,$$

so ist gewifs

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Man kann also $\delta_0 \leqq \varDelta_0$ setzen.

Die Stetigkeit von $\varDelta(x)$ für irgend einen Werth $a \leqq x \leqq b$ läfst sich leicht zeigen. Es sei x_1 irgend ein von x verschiedener Werth im Intervalle

$$(x - \varDelta(x), \quad x + \varDelta(x)).$$

Ist $x < x_1 < x + \varDelta(x)$, so ist

$$x_1 - \{x + \varDelta(x) - x_1\} > x - \varDelta(x),$$

so dafs unmittelbar erhellt, dafs $\varDelta(x_1) \geqq x + \varDelta(x) - x_1$ sein mufs. Sonst würde nämlich das Intervall $(x_1 - \varDelta(x_1), x_1 + \varDelta(x_1))$ vollständig innerhalb $(x - \varDelta(x), x + \varDelta(x))$ liegen. Wenn aber $x - \varDelta(x) < x_1 < x$, so ist

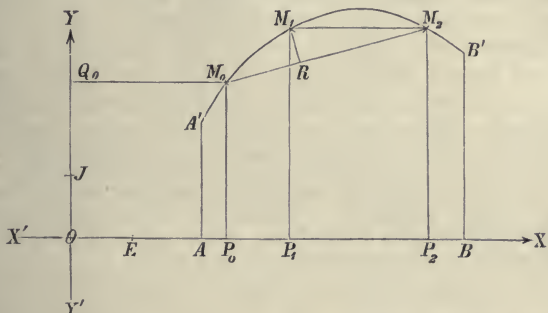
$$x_1 + \{x_1 - x + \varDelta(x)\} < x + \varDelta(x),$$

so dafs nun $\varDelta(x_1) \geqq x_1 - x + \varDelta(x)$. Man hat also allgemein $\varDelta(x_1) \geqq \varDelta(x) - |x_1 - x|$. Vertauscht man hier x und x_1, so folgt $\varDelta(x) \geqq \varDelta(x_1) - |x_1 - x|$, d. i.

$$\varDelta(x_1) \leqq \varDelta(x) + |x_1 - x|.$$

Demnach findet man $|\varDelta(x_1) - \varDelta(x)| \leqq |x_1 - x|$. Und wenn σ irgend eine positive Zahl bedeutet, so hat man für alle x_1, wofür $|x_1 - x| < \sigma$ $|\varDelta(x_1) - \varDelta(x)| < \sigma$, q. e. d.

17. Geometrische Darstellung der Functionen einer Veränderlichen. Werden durch einen Punkt O der Ebene zwei Gerade XX', YY' — die Axen — gezogen, so können von O aus auf der ersten die Werthe der Function $y = f(x)$ aufgetragen werden. Hierzu ist notwendig, dafs auf jeder der Geraden eine positive Richtung OX, bez. OY angenommen und eine Strecke OE, bez. OJ der Einheit zugeordnet werde. Gewöhnlich läfst man $OJ = OE$,



sowie $OY \perp OX$ sein. Dieses auch hier vorausgesetzt, findet man jedem Werthe x_0 entsprechend eine Strecke (Abscisse) $x_0 = OP_0$ und ähnlich $f(x_0) = y_0$ entsprechend eine Strecke (Ordinate) $y_0 = OQ_0$. Zieht man hierauf durch P_0, Q_0, Parallele, bez. zu OY, OX, so betrachtet man ihren Schnittpunkt M_0 als Repräsentanten des Werthsystemes $x_0 y_0$. Ist $f(x)$ eindeutig definirt für alle Werthe $a \leqq x \leqq b$, so kann man auf diese Art zu beliebig vielen Punkten der Strecke AB — $OA = a$, $OB = b$ — auf der Abscissen-Axe die zugehörigen Functionswerthe $y = f(x)$ als Ordinaten construiren, wobei wir von der unvermeidlichen Ungenauigkeit geometrischer Constructionen absehen. Insbesondere sei $AA' = f(a)$, $BB' = f(b)$. — Wenn $f(x)$ für alle Werthe x des Intervalles (a, b) eindeutig und stetig ist, so sagt man, dafs die Endpunkte der Ordinaten $P_0 M_0$ eine stetige Linie $A'B'$ in der Ebene bilden. Es fragt sich nun, unter welchen Umständen wir uns ein geometrisches Bild davon machen können. Natürlich müssen diejenigen Punkte, deren Kenntnifs uns zur Beurtheilung des Verlaufes einer Linie notwendig erscheint, in endlicher Anzahl vorhanden sein. Hierzu rechnen wir zunächst die höchsten und tiefsten Punkte, die

Wendepunkte, Ecken und Spitzen. Ferner darf die Linie mit jeder Geraden, jedem Kreise und jeder anderen aus der Geometrie bekannten Curve höchstens eine endliche Anzahl von Punkten gemein haben. Demnach können wir die stetige Function $y = f(x)$ geometrisch darstellen, wenn die zugehörige Curve $A'B'$ entweder ein convexer Bogen ohne Ecken und Spitzen ist, oder aus einer endlichen Anzahl solcher Bögen und geradliniger Stücke besteht. Dabei heifst ein Bogen $A'B'$ convex, wenn er mit einer Geraden höchstens zwei Punkte gemein hat.

Der Function $y = f(x)$ entspricht ein convexer Bogen $A'B'$ unter der folgenden Bedingung. Es seien x_0, x_1, x_2 drei aufeinander folgende, sonst beliebige Werthe von x im Intervalle (a, b) — die Grenzen $x = a$, $x = b$ eingeschlossen — und

$$y_0 = f(x_0), \qquad y_1 = f(x_1), \qquad y_2 = f(x_2).$$

Dann mufs der Ausdruck

$$y_0(x_2 - x_1) + y_1(x_0 - x_2) + y_2(x_1 - x_0)$$

$$(1) \qquad (a \leqq x_0 < x_1 < x_2 \leqq b)$$

von 0 verschieden und gleichbezeichnet sein, wie auch x_0, x_1, x_2 angenommen werden. Denn bekanntlich drückt er den doppelten Flächeninhalt des Dreieckes $M_0\ M_1\ M_2$ aus, versehen mit dem Zeichen $+$ oder $-$, je nachdem M_1 auf der positiven oder negativen Seite der Richtung M_0M_2 liegt, d. h. je nachdem der rechte Winkel M_2RM_1 durch Drehung eines beweglichen Halbstrahles um R von dem Schenkel RM_2 aus in gleichem oder in entgegengesetztem Sinne beschrieben wird, wie der rechte Winkel XOY von dem Schenkel OX aus. Wenn aber der Bogen $A'B'$ convex ist, so mufs ein Punkt M_1, irgendwo auf ihm zwischen zwei beliebigen Punkten $M_0\ M_2$ desselben gewählt, immer auf derselben Seite der Richtung M_0M_2 liegen. — Lassen wir P_1 die Mitte von $P_0\ P_2$ sein und setzen demnach

$$x_0 = x_1 - \xi, \qquad x_2 = x_1 + \xi, \qquad (\xi > 0),$$

so ist mit (1) gleichbezeichnet der Ausdruck

$$(2) \qquad f(x_1 + \xi) + f(x_1 - \xi) - 2f(x_1),$$

so dafs auch er stets dasselbe Zeichen haben mufs, wenn nur die Werthe x_1, $x_1 - \xi$, $x_1 + \xi$ im Intervalle (a, b) liegen. Es läfst sich nun leicht das Folgende nachweisen: „Wenn zu jedem Punkte x_1 zwischen a und b eine positive Zahl $\varDelta(x_1)$ gehört, so dafs, wenn nur $0 < \xi < \varDelta(x_1)$, der Ausdruck (2) stets dasselbe Zeichen hat, so gilt das Nämliche vom Ausdrucke (1), wie auch x_0, x_1, x_2 angenommen werden, und zwar stimmt das Zeichen des letzteren mit dem des ersteren überein." Wir denken uns x_0, x_2 fest und x_1 zwischen den Grenzen $x_0 x_2$ veränderlich. Dividiren wir (1) durch $x_2 - x_0$, wodurch sich das Zeichen nicht ändert, und ersetzen x_1 durch x, so geht (1) über in

$$y_0 + \frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0}(x - x_0) - f(x) = \varphi(x) \qquad (x_0 < x < x_2),$$

so dafs

$$\varphi(x_0) = 0, \qquad \varphi(x_2) = 0.$$

Da

$$\varphi(x + \xi) + \varphi(x - \xi) - 2\varphi(x) = -\{f(x + \xi) + f(x - \xi) - 2f(x)\},$$

so folgt, dafs wenn (2) für $\xi < \varDelta(x)$ stets etwa positiv ist,

$$\varphi(x + \xi) + \varphi(x - \xi) - 2\varphi(x) < 0$$

für

$$0 < \xi < \varDelta(x).$$

Nun ist $\varphi(x)$ eine stetige Function von x für alle $x_0 \leqq x \leqq x_2$; es giebt also nach Nr. 15 mindestens einen Werth $d - x_0 \leqq d \leqq x_2$, so dafs $\varphi(d)$ gleich der unteren Grenze von $\varphi(x)$ für die genannten Werthe von x. Es kann aber d nicht innerhalb des Intervalles (x_0, x_2) liegen, da, wie klein auch ξ sein mag,

$$\varphi(d + \xi) - \varphi(d) \geqq 0, \qquad \varphi(d - \xi) - \varphi(d) \geqq 0,$$

somit

$$\varphi(d + \xi) + \varphi(d - \xi) - 2\varphi(d) \geqq 0$$

sein müfste. Somit ist $d = x_0 = x_2$ und die untere Grenze von $\varphi(x)$ Null, so dafs für $x_0 < x < x_2$ $\varphi(x) > 0$ sein mufs. — „Die notwendige und hinreichende Bedingung dazu, dafs die für alle Werthe $a \leqq x \leqq b$ eindeutige und stetige Function $y = f(x)$ bei der geometrischen Darstellung durch rechtwinklige Coordinaten einen convexen Bogen liefere, besteht darin, dafs zu jedem Werthe $a < x < b$ eine Zahl $\varDelta(x) > 0$ gehören mufs derart, dafs für alle $0 < \xi < \varDelta(x)$

$$f(x + \xi) + f(x - \xi) - 2f(x)$$

von Null verschieden und gleichbezeichnet ist."

Wenn der convexe Bogen $A'B'$ vollständig auf einer Seite der x-Axe liegt, so kehrt er, wie aus der Figur unmittelbar ersichtlich ist, der x-Axe seine convexe oder concave Seite zu, je nachdem für $a < x < b$ und $0 < \xi < \varDelta(x)$

$$f(x)\{f(x + \xi) + f(x - \xi) - 2f(x)\}$$

beständig positiv oder negativ ist.

Wir können ferner zeigen, dafs, „wenn für einen Werth $a < x < b$

$$\text{(3)} \qquad \lim_{\xi = 0} \frac{1}{\xi}\Big\{f(x + \xi) + f(x - \xi) - 2f(x)\Big\} = 0,$$

die Unbestimmtheitsgrenzen des Bruches

(4) $$\{f(x+\xi)-f(x)\} : \xi,$$

bei $\lim \xi = -0$ dieselben sein müssen wie bei $\lim \xi = +0$“, was geometrisch bekanntlich soviel besagt, als dafs der Bogen $A'B'$ weder Ecken noch Spitzen haben kann. Nach Nr. 7 kann die obere Unbestimmtheitsgrenze bei $\lim \xi = +0$ entweder $+\infty$, eine endliche Zahl O oder $-\infty$ sein. Nach (3) gehört nun zu $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta > 0$, so dafs für $0 < \xi < \delta$

(5) $$-\varepsilon < \frac{f(x+\xi)-f(x)}{\xi} - \frac{f(x-\xi)-f(x)}{-\xi} < +\varepsilon.$$

Daraus folgt im ersten Falle, wo jeder Zahl $G > 0$ eine Zahl $\delta > 0$ entspricht, derart, dafs, wenn $0 < \xi < \delta$, ein Werth $\xi_1 < \xi$ vorhanden ist, wofür

$$\{f(x+\xi_1)-f(x)\} : \xi_1 > G,$$

auch

$$\frac{f(x-\xi_1)-f(x)}{-\xi_1} > G - \varepsilon.$$

Da $G-\varepsilon$ jede positive Zahl sein kann, so ist die obere Unbestimmtheitsgrenze von (4) bei $\lim \xi = -0$ auch $+\infty$. — Im zweiten Falle gehört zu $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta > 0$, so dafs wenn $0 < \xi < \delta$

$$\frac{f(x+\xi)-f(x)}{\xi} < O + \varepsilon, \quad \frac{f(x+\xi_1)-f(x)}{\xi_1} > O - \varepsilon,$$

wobei ξ_1 ($< \xi < \delta$) einen bestimmten Werth bedeutet. Aus (5) findet man aber

$$\frac{f(x-\xi)-f(x)}{-\xi} < O + 2\varepsilon, \quad \frac{f(x-\xi_1)-f(x)}{-\xi_1} > O - 2\varepsilon,$$

d. h. die obere Unbestimmtheitsgrenze von (4) bei $\lim \xi = -0$ ist O. — Im dritten Falle gehört zu $g > 0$ eine Zahl δ, so dafs, wenn nur $0 < \xi < \delta$

$$\frac{f(x+\xi)-f(x)}{\xi} < -G,$$

somit nach (5)

$$\frac{f(x-\xi)-f(x)}{-\xi} < -(G-\varepsilon),$$

also die in Rede stehende Unbestimmtheitsgrenze von (4) $-\infty$ ist. — Aehnliche Schlüsse gelten bezüglich der unteren Unbestimmtheitsgrenze.

Man untersuche mit Hilfe der vorstehenden und eines Satzes in X. 23 die folgenden Curven:

1) $y = x^m$ (m natürliche Zahl).

2) $y = x^{-m}$.

3) $y^2 = x^3$.
4) $y^2 - x^2 + x^3 = 0$.
5) $y^2 + x^2 - x^3 = 0$.
6) $y = a^x$.
7) $y = {}^B\log x$.

18. Functionen von zwei und mehreren unabhängigen Veränderlichen. Wenn jeder der in bestimmter Anzahl vorgelegten Veränderlichen $x_1, x_2 \ldots x_m$ ein gewisser Bereich vorgeschrieben ist und einem jeden Systeme von Werthen $x_1, x_2 \ldots x_m$, worin x_1 irgend einer aus den dieser Veränderlichen beizulegenden Werthen, x_2 irgend einer aus den der zweiten Veränderlichen beizulegenden Werthen u. s. f., eine Zahl y zugeordnet wird, so heifst y eine eindeutige Function der unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2 \ldots x_m$. — Es ist jedoch, wie G. Cantor zuerst nachgewiesen hat,[15]) der soeben gebildete Begriff nicht wesentlich verschieden von dem einer eindeutigen Function einer Veränderlichen x. Wenn jede der Veränderlichen $x_1, x_2 \ldots x_m$ stetig ist, d. i. x_1 alle Werthe eines endlichen Intervalles (a_1, b_1), x_2 alle Werthe eines endlichen Intervalles (a_2, b_2), $\ldots x_m$ alle Werthe eines endlichen Intervalles (a_m, b_m) annehmen kann, und wenn x eine andere Veränderliche mit dem Spielraum $0 \leqq x \leqq 1$ ist; so ist es möglich die eine Veränderliche x den hier in Betracht kommenden Werthsystemen $x_1, x_2 \ldots x_m$ so zuzuordnen, dafs zu jedem bestimmten Werthe von x ein bestimmtes Werthsystem $x_1, x_2 \ldots x_m$ und umgekehrt zu jedem bestimmten Werthsysteme $x_1, x_2 \ldots x_m$ ein gewisser Werth von x gehört. Somit erscheint die obige Veränderliche y als eindeutige Function der einen Veränderlichen x. — Diese höchst bemerkenswerthe Thatsache wird uns jedoch nicht abhalten, den Begriff „Function von zwei und mehreren Veränderlichen" überall anzuwenden, wo ein concretes Gesetz der Zuordnung zwischen Systemen $x_1, x_2 \ldots x_m$ und Zahlen vorliegt. So haben wir schon in Nr. 3 die rationalen Functionen der Veränderlichen $x_1, x_2 \ldots x_m$ eingeführt.

19. Gleichmäfsige Convergenz der Functionen zweier unabhängigen Veränderlichen zu den dadurch sich ergebenden Grenzwerthen, dafs sich eine der Veränderlichen einem und demselben Grenzwerthe auf dieselbe Art nähert.

Zu den Grenzwerthen von Functionen mehrerer Veränderlichen übergehend, begegnet uns zunächst die folgende Untersuchung.

Es sei $f(x, y)$ eine eindeutige Function von x, y, wobei für x solche von y unabhängige Werthe vorgeschrieben sind, die einen Grenzübergang zu einem constanten Grenzwerthe bilden (z. B. $a < x \leqq a + D$ — D constant — und $\lim x = a + 0$), für y entweder Werthe in einem endlichen Intervalle (c, d) mit Einschlufs dieser Grenzen, oder Werthe innerhalb eines beliebigen (endlichen oder unendlichen) Intervalles mit Ausschlufs der Grenzen. Für jeden der genannten Werthe y besitze $f(x, y)$ entsprechend dem obigen Grenzübergange der Veränderlichen x einen endlichen Grenzwerth $\varphi(y)$, z. B.

$$\lim_{x=a+0} f(x, y) = \varphi(y),$$

d. h. zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ gehört eine Zahl $\delta > 0$, derart, dafs

$$|f(x, y) - \varphi(y)| < \varepsilon$$

für alle hier in Betracht kommenden $a < x < a + \delta$. Die Zahl δ ist zufolge dieser Definition nicht völlig bestimmt, sie kann durch jede kleinere positive Zahl ersetzt werden. Es fragt sich nun, ob man sie für alle Werthe, die der Veränderlichen y zugewiesen werden können, ohne Ausnahme, durch eine Constante $\delta_0 > 0$ ersetzen kann. Um diese Frage zu entscheiden, wollen wir uns an Stelle von δ eine Zahl $\varDelta$ denken, welche in folgender Art definirt ist. Für $a < x < a + \varDelta$ ist

$$|f(x, y) - \varphi(x)| < \varepsilon,$$

in jedem Intervalle $(a + \varDelta, a + \varDelta + \alpha)$ aber, wie klein auch die positive Zahl α sein mag, soll mindestens ein Werth x' von x vorhanden sein, wofür

$$|f(x', y) - \varphi(y)| \geqq \varepsilon.$$

Δ wird nun nicht allein von ε, was sich von selbst versteht, sondern auch von y abhängen, so dafs wir dafür $\Delta(y)$ schreiben wollen. Während y die ihm zukommenden Werthe (z. B. $c \leq y \leq d$) ertheilt werden, hat die Veränderliche $\Delta(y)$ die stets positiv ist, eine untere Grenze $\Delta_0 \geqq 0$. Im Falle dafs $\Delta_0 > 0$, findet man wegen $\Delta(y) \geqq \Delta_0$, dafs für alle $a < x < a + \Delta_0$

$$|f(x, y) - \varphi(y)| < \varepsilon,$$

was auch immer y für einen unter der ihm beigelegten Werthe annehmen mag. Es existirt somit hier eine Zahl δ_0, nämlich $\delta_0 \leqq \Delta_0$. Umgekehrt, ist eine solche Zahl δ_0 vorhanden, so hat man $\Delta(y) \geq \delta_0$, somit kann Δ_0 nicht Null sein.

Die Functionen $f(x, y)$ können nun bei einem solchen Grenzübergange wie $\lim x = a + 0$ ein doppeltes Verhalten zeigen. Entweder ist $\Delta_0 > 0$ oder gleich 0. Im ersten Falle sagt man: „Die Function $f(x, y)$ nähert sich bei

$$\lim x = a + 0$$

dem Grenzwerthe $\varphi(y)$ gleichmäfsig für alle dem y beigelegten Werthe," d. h. zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ gehört eine Zahl $\delta_0 > 0$, derart, dafs

$$|f(x, y) - \varphi(y)| < \varepsilon$$

für alle hierher gehörigen $a < x < a + \delta_0$, welchen der ihr zugewiesenen Werthe auch die Veränderliche y annehmen mag. — Im zweiten Falle ist die Annäherung von $f(x, y)$ an $\varphi(y)$ ungleichmäfsig: wie klein wir auch δ_0 annehmen mögen, so giebt es doch mindestens ein Werthsystem $x'y'$ $(a < x' < a + \delta_0)$, derart, dafs

$$|f(x', y') - \varphi(y')| \geqq \varepsilon.$$

Leicht ist es, die Thatsache der ungleichmäfsigen Convergenz nachzuweisen. Nach Nr. 5 ist

$$\lim_{x=+\infty} y^x = 0 \qquad (0 < y < 1).$$

Wir haben

$$y^x \lesseqgtr \varepsilon,$$

je nachdem

$$x \log y \lesseqgtr \log \varepsilon,$$

d. i.

$$x \gtreqless \frac{\log \varepsilon}{\log y},$$

so dafs

$$\varDelta(y) = \log \varepsilon : \log y.$$

Läfst man y alle Werthe des Intervalles $(0, 1)$ mit Ausschlufs der Grenzen annehmen, so ergiebt sich

$$\lim_{y=1-0} \varDelta(y) = +\infty.$$

Wie grofs man auch eine Zahl $G > 0$ annehmen mag, niemals wird für alle $0 < y < 1$

$$y^x < \varepsilon$$

sein, wenn nur $x > G$.

Wir wollen sogleich bemerken: „Für alle $c \leqq y \leqq d$ sei $f(x, y)$ bei constantem x — $a < x \leqq a + D$ — eine stetige Function von y und $f(x, y)$ convergire bei

$$\lim x = a + 0$$

für $c \leqq y \leqq d$ gleichmäfsig zum Grenzwerthe $\varphi(y)$, so ist für eben dieselben Werthe von y $\varphi(y)$ eine stetige Function von y.“ — Man hat nämlich neben einander, wenn $c \leqq y_0 \leqq d$,

$$a < x < a + \delta_0, \qquad |\varphi(y_0) - f(x, y_0)| < \varepsilon,$$
$$|\varphi(y) - f(x, y)| < \varepsilon.$$

Bezeichnet ferner x' einen bestimmten Werth: $a < x' < a + \delta_0$ so gehört zu $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta' > 0$, derart, dafs

$$|f(x', y) - f(x', y_0)| < \varepsilon,$$

für

$$|y - y_0| < \delta'.$$

Demnach ist für alle $|y - y_0| < \delta'$

$$|\varphi(y) - \varphi(y_0)| < 3\varepsilon.$$

D. h. nach Nr. 12 $\varphi(y)$ ist für den Werth $y = y_0$ stetig. An den Grenzen $y = c$, $y = d$ ist die Stetigkeit von $\varphi(y)$

mindestens einseitig. — Man darf nicht umgekehrt aus der Stetigkeit von $\varphi(y)$ für alle $c \leqq y \leqq d$ auf die gleichmäfsige Convergenz von $f(x, y)$ zu $\varphi(y)$ für die genannten y schliefsen (vgl. X. 21).

Da im obigen Beispiele $\lim\limits_{x=+\infty} y^x$ für $y = 1$ auch 1 ist, so hätten wir zufolge des soeben erwiesenen Satzes sofort schliefsen können, dafs y^x bei $\lim x = +\infty$ nicht gleichmäfsig für alle $0 \leqq y \leqq 1$ zum Grenzwerthe 0 bez. 1 convergirt, somit auch nicht für alle $0 < y < 1$.

Setzt man in dem obigen Satze die gleichmäfsige Convergenz nur voraus für alle $c < y < d$, so folgt notwendig die Existenz endlicher Grenzwerthe

$$\lim_{y=c+0} \varphi(y), \qquad \lim_{y=d-0} \varphi(y).$$

Denn schreibt man oben statt y_0, y bezüglich

$$c + \eta, \qquad c + \eta', \qquad (0 < \eta' < \eta),$$

so folgt wegen der einseitigen Stetigkeit von $f(x, y)$ für

$$y = c \qquad |\varphi(c + \eta') - \varphi(c + \eta)| < 3\varepsilon$$

für alle $0 < \eta < \delta'$, wodurch nach Nr. 8 die zuletzt ausgesprochene Behauptung gerechtfertigt erscheint. — In dem vorstehenden Beispiele ist $\lim \varphi(y) = 0$ für $\lim y = 1 - 0$; es erhellt daraus, dafs man sie nicht umkehren darf.

Die Unterscheidung zwischen gleichmäfsiger und ungleichmäfsiger Convergenz in der angegebenen Weise ist von fundamentaler Bedeutung. Sie wurde von L. Seidel in der Theorie der unendlichen Reihen zuerst aufgestellt vgl. X. 21.

Anmerkung. Es ist wesentlich, dafs der Spielraum der Veränderlichen x für alle Werthe von y derselbe sei oder doch auf einen solchen Bereich zurückgeführt werden kann. Man vergleiche das folgende Beispiel. Es sei $f(x)$ für alle Werthe $a \leqq x \leqq b$ eindeutig definirt und stetig. Nach Nr. 12 hat man für jeden Werth $a \leqq x < b$

$$\lim f(x + \xi) = f(x) \quad \text{für} \quad \lim \xi = +0.$$

Nehmen wir dazu den Satz in Nr. 16, so können wir unmittelbar behaupten, dafs $f(x + \xi)$ bei $\lim \xi = +0$ gleichmäfsig für alle Werthe $a \leqq x \leqq c$ zum Grenzwerthe $f(x)$ convergirt, unter c

irgend einen Werth zwischen a und b verstanden. Denn für die genannten Werthe von x kann ξ alle Werthe $0 < \xi \leqq b - c$ durchlaufen. Es hätte jedoch keinen Sinn zu behaupten, daſs der obige Grenzübergang gleichmäſsig erfolge für alle Werthe $a \leqq x < b$.

20. Nunmehr wären bezüglich der eindeutigen Functionen von zwei und mehreren unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2 \ldots x_m$, für deren jede irgend ein Grenzübergang zu einem constanten Werthe festgesetzt ist, ähnliche Betrachtungen anzustellen, wie wir sie hinsichtlich der Functionen einer Veränderlichen in Nr. 5—7 vorführten. Wir wollen uns jedoch hier darauf beschränken zu erklären, was man unter dem Grenzwerthe einer solchen Function unter der Voraussetzung zu verstehen habe, daſs die $x_1, x_2 \ldots x_m$ je zu einem constanten Grenzwerthe $a_1, a_2 \ldots a_m$ convergiren und dabei unabhängig von einander verbleiben. D. h. schreiben wir der x_1 irgend welche Werthe x'_1 vor, wofür $\lim x'_1 = a_1$; der x_2 irgendwelche Werthe x'_2, wofür $\lim x'_2 = a_2$ u. s. f., so soll $f(x_1, x_2 \ldots x_m)$ für jedes Werthsystem $x'_1, x'_2 \ldots x'_m$ definirt sein und jeder dieser Werthe von f in den folgenden Relationen verwendet werden können. Es seien z. B. die $a_1, a_2 \ldots a_m$ endliche Zahlen und

$$\lim x_1 = a_1 + 0, \qquad \lim x_2 = a_2 + 0 \ldots,$$
$$\lim x_m = a_m + 0;$$

ebenso sei auch b eine bestimmte Zahl. Unter diesen Voraussetzungen drücken wir durch die Formel

$$\lim_{x_1 = a_1 + 0 \ldots x_m = a_m + 0} f(x_1 \ldots x_m) = b$$

kurz folgendes Verhalten der Function f aus. Jeder Zahl $\varepsilon > 0$ können positive Zahlen $\delta_1, \delta_2 \ldots \delta_m$ zugeordnet werden in der Art, daſs für jedes System von Werthen, die den Veränderlichen $x_1, x_2 \ldots x_m$ zufolge ihrer Definition zukommen und dabei die Bedingungen erfüllen

$$a < x_1 < a + \delta_1, \qquad a < x_2 < a + \delta_2 \ldots,$$
$$a < x_m < a + \delta_m,$$

die Differenz

$$f(x_1, x_2 \ldots x_m) - b,$$

ihrem absoluten Betrage nach kleiner als ε ist.

Es hat keine Schwierigkeit, diese Definition auf andere Grenzübergänge der unabhängigen Veränderlichen zu verallgemeinern. Eben so wenig kann es einem Zweifel unterliegen, was man unter einem unendlichen Grenzwerthe der Function $f(x_1, x_2 \ldots x_m)$ zu verstehen habe. Wir sagen z. B.

$$\lim_{x_1 = a_1 + 0 \ldots x_m = a_m + 0} f(x_1 \ldots x_m) = +\infty,$$

wenn zu jeder Zahl $G > 0$ positive Zahlen $\delta_1, \delta_2 \ldots \delta_m$ gehören in der Art, dafs für alle hierher gehörigen Werthsysteme $x_1, x_2 \ldots x_m$, die der Bedingung genügen:

$$a < x_1 < a + \delta_1, \quad a < x_2 < a + \delta_2, \quad \ldots a < x_m < a + \delta_m,$$

$$f(x_1, x_2 \ldots x_m) > G$$

ist.

Es ist unmittelbar ersichtlich, dafs auch für die Grenzwerthe von Functionen mehrerer Veränderlichen die in Nr. 9 abgeleiteten Sätze gelten.

21. Stetigkeit von Functionen zweier und mehrerer unabhängigen Veränderlichen.[16])

Ist eine Function $f(x_1, x_2 \ldots x_m)$ für alle Werthsysteme eindeutig definirt, welche den Bedingungen Genüge leisten

$$a_1 - d_1 \leqq x_1 \leqq a_1 + d_1, \qquad a_2 - d_2 \leqq x_2 \leqq a_2 + d_2, \ldots$$
$$a_m - d_m \leqq x_m \leqq a_m + d_m,$$

so heifst sie stetig an der Stelle $(a_1, a_2 \ldots a_m)$, wenn

$$\lim_{x_1 = a_1 \ldots x_m = a_m} f(x_1, x_2 \ldots x_m) = f(a_1, a_2 \ldots a_m).$$

D. i. jeder Zahl $\varepsilon > 0$ können positive Zahlen $\delta_1, \delta_2 \ldots \delta_m$ zugeordnet werden in der Art, dafs für alle Werthsysteme $x_1, x_2 \ldots x_m$, worin

$$|x_1 - a_1| < \delta_1, \quad |x_2 - a_2| < \delta_2 \ldots |x_m - a_m| < \delta_m,$$

$$|f(x_1, x_2 \ldots x_m) - f(a_1, a_2 \ldots a_m)| < \varepsilon.$$

Daraus ergiebt sich der folgende Satz über Functionen einer Veränderlichen, wovon wir einen besonderen Fall am Schlusse von Nr. 12 anführten.

Satz.[17]) Ist die eindeutige Function $\varphi(y_1, y_2 \ldots y_m)$ an der Stelle

$$y_1 = b_1,\ y_2 = b_2 \ldots y_m = b_m$$

stetig und haben die Functionen

$$f_1(x),\ f_2(x)\ \ldots\ f_m(x)$$

bei einem und demselben Grenzübergange der unabhängigen Veränderlichen x bez. die endlichen Grenzwerthe $b_1, b_2 \ldots b_m$, so ist für den nämlichen Grenzübergang von x

$$\lim \varphi\{f_1(x),\ \ f_2(x) \ldots f_m(x)\} = \varphi(b_1, b_2 \ldots b_m).“$$

Beweis. Es sei z. B. $\lim x = a + 0$. Zunächst weifs man, dafs zu $\varepsilon > 0$ positive Zahlen $\eta_1, \eta_2 \ldots \eta_m$ gehören in der Art, dafs für alle

$$|y_1 - b_1| < \eta_1,\quad |y_2 - b_2| < \eta_2 \ldots |y_m - b_m| < \eta_m,$$
$$\varphi(y_1, y_2 \ldots y_m) - \varphi(b_1, b_2 \ldots b_m)| < \varepsilon.$$

Ferner giebt es Zahlen $\delta_r > 0$, so dafs für die hierher gehörigen

$$a < x < \delta_r,\qquad |f_r(x) - b_r| < \eta_r,\qquad (r = 1, 2 \ldots m).$$

Somit ist, wenn δ die kleinste der Zahlen $\delta_1, \delta_2 \ldots \delta_m$ bedeutet,

$$|\varphi\{f_1(x), f_2(x) \ldots f_m(x)\} - \varphi(b_1, b_2 \ldots b_m)| < \varepsilon,$$

falls nur $a < x < a + \delta$.

Derselbe Satz gilt auch, wenn in $\varphi(y_1 \ldots y_m)$ an Stelle der $y_1 \ldots y_m$ Functionen f_r der unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2 \ldots x_n$ gesetzt werden und für die nämlichen von einander unabhängigen Grenzübergänge derselben

$$\lim f_1 = b_1 \ldots \lim f_m = b_m.$$

Die Sätze in Nr. 13, 15, 16 lassen sich ebenfalls auf stetige Functionen von zwei und von mehreren Veränderlichen ausdehnen. So darf man behaupten, dafs eine eindeutige Function $f(x, y)$ der Veränderlichen x, y, welche stetig ist in allen Punkten eines in der XY-Ebene verzeichneten endlichen Gebietes $\mathfrak{F}$ mit Einschlufs der Begrenzung, eine endliche obere (untere) Grenze g hat und dafs es im Gebiete $\mathfrak{F}$ mindestens einen Punkt x_0, y_0 giebt, wofür $f(x_0, y_0) = g$. — Der Beweis dieses Satzes ist dem des Satzes in Nr. 13 ähnlich. Er beruht auf dem Hilfssatze: „Ist $f(x, y)$ definirt für alle Werthsysteme im Gebiete $\mathfrak{F}$ und g ihre obere Grenze, die auch $+\infty$ sein kann, so giebt es darin mindestens einen Punkt $x = x_0$, $y = y_0$, derart, dafs in jeder Umgebung von $x_0 y_0$:

$$x_0 - \delta \leqq x \leqq x_0 + \delta, \qquad y_0 - \varepsilon \leqq y \leqq y_0 + \varepsilon,$$

was auch die positiven Zahlen δ, ε sein mögen, die obere Grenze von $f(x, y)$ g sein mufs.“ Um denselben zu zeigen, theilt man das Gebiet $\mathfrak{F}$ durch Parallele zu den Coordinatenaxen in Rechtecke und verfährt so wie a. a. O.

Näheres Eingehen auf die Theorie der stetigen Functionen von mehreren Veränderlichen, sowie auf die geometrische Darstellung derselben im Falle $m = 2$ kann hier unterbleiben.

Anhang. Die unendlichkleinen Gröfsen.

22. **Erste Theorie.** Die Momente der Functionen. Man sagt, dafs eine Veränderliche x unendlich klein wird, wenn sie den Grenzwerth 0 hat. Ferner: Ist $\lim f(x) = 0$ bei $\lim x = a$, so wird $f(x)$ zugleich mit $x - a$ unendlichklein. Dabei kann der Quotient $f(x) : (x - a)$ einen endlichen Grenzwerth b haben, wie mehrere Formeln in Nr. 10—12 zeigen. Das gilt insbesondere von den Quotienten $\{g(x) - g(a)\} : (x - a)$, worin $g(x)$ eine für $x = a$ stetige Function bedeutet, — mit deren Betrachtung die Differentialrechnung sich beschäftigt. Diese Thatsache (sowie die allgemeine, dafs der Quotient zweier Functionen von x einen endlichen Grenzwerth haben kann), — deren arithmetische Bedeutung wir in Nr. 5 kennen gelernt haben, hielt man früher für erklärt durch die Phrase: der Quotient $f(x) : (x - a)$ habe für $x = a$ einen endlichen Werth b. Da aber der Nenner $x - a$ für $x = a$ Null ist,

so verliert dieser Quotient für $x = a$ jede Bedeutung. Soll dennoch unter den obwaltenden Umständen die Zahl b durch eine Division entstehen, so können Dividend und Divisor nicht reelle Zahlen sein, sondern müssen etwas wesentlich davon Verschiedenes, zum Rechnen geeignete Gröfsen einer neuen Art sein.

Nach den Erörterungen im 3. Abschnitte wird es einer weiteren Auseinandersetzung nicht mehr bedürfen, wie man bei Aufstellung von neuen Gröfsen vorzugehen hat. Wir schliefsen uns hierbei lediglich an Euclid an. Hätte man sich auch früher daran gehalten, so wäre der Analysis manche Verirrung erspart geblieben. Wir theilen die folgende Untersuchung hier deswegen mit, weil sie eine lehrreiche Anwendung der im 3. Abschnitte entwickelten Principien bildet, nicht etwa, weil wir eines von den gegenwärtig bekannten Systemen von unendlichkleinen Gröfsen für in der Analysis unentbehrlich halten. Der Kürze halber beschränken wir uns auf eine gedrängte Übersicht derselben.[18])

Es sei für die unabhängige Veränderliche x ein bestimmter Grenzübergang festgestellt z. B. $\lim x = a + 0$. Er soll im Folgenden immer da gemeint sein, wo über das Verhalten von x nichts Anderes angegeben ist. Ferner sei gegeben ein System von Functionen $f(x)$, deren jede bei dem in Rede stehenden Grenzübergange von x den Grenzwerth 0 hat, dabei aber beständig positiv ist d. i.

$$\lim f(x) = + 0.$$

Wir nehmen noch an, dafs jede rationale Function von beliebig, aber endlich vielen Functionen unseres Systemes bei dem festgesetzten Grenzübergange $\lim x = a + 0$ einen Grenzwerth besitze (der auch $+\infty$ oder $-\infty$ sein kann). Es läfst sich leicht zeigen, dafs die Functionen, welche rational gebildet sind aus Potenzen mit positiven constanten Exponenten von beliebigen unter den Functionen x,

$$1 : l(x - a) = \lambda_1(x - a), \quad 1 : l(-\lambda_1 (x - a)) = \lambda_2(x - a)$$
$$\ldots 1 : l(-\lambda_{n-1}(x - a)) = \lambda_n(x - a) \ldots$$

und den reciproken Werthen von

$$e^{\frac{1}{x-a}} = e_1\left(\frac{1}{x-a}\right), \quad e_1\left\{e_1\left(\frac{1}{x-a}\right)\right\} = e_2\left(\frac{1}{x-a}\right), \ldots$$
$$e_1\left\{e_{n-1}\left(\frac{1}{x-a}\right)\right\} = e_n\left(\frac{1}{x-a}\right) \cdots$$

ein solches System ausmachen. Nach dem gegenwärtigen Stande der Wissenschaft ist es jedoch im Allgemeinen nicht möglich, die Frage, ob dieses System durch eine gegebene Function $f(x)$, wofür $\lim f(x) = +0$, erweitert werden könne, blofs aus der Natur von $f(x)$ zu beantworten.[19]) Sie kann eben in der Regel nur durch directen Versuch entschieden werden. Dieses Umstandes wegen bleibt die nachstehende Theorie hinsichtlich ihrer practischen Verwendbarkeit zurück hinter anderen, auf ähnliche Weise gewonnenen z. B. der Euclid'schen Verhältnifslehre.

Nun werden die folgenden Definitionen aufgestellt.

1. Definition. Jeder Function $f(x)$ unseres Systems wird ein neues Object zugeordnet: $\mathfrak{u}(f)$, das wir auf einen von Newton gebrauchten Terminus zurückgreifend,[20]) als Moment der Function $f(x)$ bezeichnen.

2. Definition. Es sei

$$\mathfrak{u}(f) = \mathfrak{u}(g),$$

wenn $\lim (f:g) = 1$.

3. Definition. Es sei

$$\mathfrak{u}(f) > \mathfrak{u}(g),$$

wenn $\lim (f:g) > 1$ ($+\infty$ eingeschlossen); und

$$\mathfrak{u}(f) < \mathfrak{u}(g),$$

wenn $\lim (f:g)$ Null oder ein positiver echter Bruch.[21])

Ein Blick auf die Gleichung

$$\frac{f(x)}{h(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{g(x)}{h(x)}$$

zeigt, dafs die in I. 2, 3 verlangten formalen Bedingungen erfüllt sind.

Da neben

$$\lim f = \lim g = +0$$

auch

$$\lim (f+g) = +0,$$

so erklären wir

4. Definition. $\mathfrak{u}(f+g)$ und jedes ihm gleiche Moment als die Summe von $\mathfrak{u}(f)$ und $\mathfrak{u}(g)$ d. i.

$$\mathfrak{u}(f+g) = \mathfrak{u}(f) + \mathfrak{u}(g).$$

Wieder erhellt unmittelbar, dafs die Sätze 1)—4) in II. 3 auch bei der Addition der Momente gelten. Der letzte, dafs neben

$$\mathfrak{u}(f) = \mathfrak{u}(f_1)$$

auch

$$\mathfrak{u}(f) + \mathfrak{u}(g) = \mathfrak{u}(f_1) + \mathfrak{u}(g),$$

folgt aus den Gleichungen

$$\frac{f+g}{f_1+g} = \left(\frac{f}{g}+1\right) : \left(\frac{f_1}{g}+1\right) = \left(1+\frac{g}{f}\right) : \left(\frac{f_1}{f}+\frac{g}{f}\right), \quad \text{(a)}$$

welche zeigen, dafs in jedem Falle

$$\lim \{(f+g):(f_1+g)\} = +1.$$

An Stelle der Sätze 5) und 6) a. a. O. treten aber die folgenden:

5) „$\mathfrak{u}(f)+\mathfrak{u}(g)$ ist gröfser oder gleich $\mathfrak{u}(f)$, je nachdem $\lim (g:f)$ nicht Null oder Null ist.“

6) „Wenn $\mathfrak{u}(f) > \mathfrak{u}(f_1)$, so ist

$$\mathfrak{u}(f) + \mathfrak{u}(g) \geqq \mathfrak{u}(f_1) + \mathfrak{u}(g).$$

Das Zeichen $=$ steht nur dann, wenn

$$\lim (f:g) = \lim (f_1:g) = +0.“$$

Durch einen Blick auf das dritte Glied in (a) erkennt man, dafs

$$\lim \{(f+g):(f_1+g)\} > 1,$$

wenn $\lim (g:f)$ endlich ist. Ist aber $\lim (f:g) = 0$, so verschwindet auch $\lim (f_1:g)$ und man hat nach (a)

$$\lim \{(f+g):(f_1+g)\} = 1.$$

Der Satz (7) a. a. O. besteht aber auch hier. „Neben

$$\mathfrak{u}(f) > \mathfrak{u}(f_1), \qquad \mathfrak{u}(g) > \mathfrak{u}(g_1)$$

ist

$$\mathfrak{u}(f) + \mathfrak{u}(g) > \mathfrak{u}(f_1) + \mathfrak{u}(g_1)\text{“},$$

wie man durch zweimalige Anwendung des Satzes 6) unmittelbar erkennt.

Subtraction der Momente. „Im Falle dafs

$$\mathfrak{u}(f) > \mathfrak{u}(g),$$

hat die Gleichung

$$\mathfrak{u}(g) + \mathfrak{x} = \mathfrak{u}(f) \tag{b}$$

die eine und nur die eine Lösung

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{u}(f - g),$$

welche kleiner ist als $\mathfrak{u}(f)$.“ Setzt man nämlich

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{u}(h),$$

so mufs

$$\lim \{(g + h) : f\} = 1,$$

also

$$\lim (h : f) = 1 - \lim (g : f)$$

sein, folglich da

$$0 < \lim [(f - g) : f] < 1, \qquad \lim \{h : (f - g)\} = 1$$

d. i.

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{u}(f - g),$$

was auch in (b) genügt. — Wenn $\mathfrak{u}(f) = \mathfrak{u}(g)$, so haben wir zufolge III. 3 die Differenz $\mathfrak{u}(f) - \mathfrak{u}(g)$ als unzulässig zu betrachten. Denn die Gleichung (b) hat nun unbegrenzt viele Lösungen, da

$$\mathfrak{u}(f) + \mathfrak{u}(h) = \mathfrak{u}(g),$$

wofern nur

$$\lim (h : f) = 0,$$

und unter diesen Functionen h solche sich befinden, deren Momente ungleich sind. — Im Falle $\mathfrak{u}(f) < \mathfrak{u}(g)$ ist nach obigem Satze 5) die Gleichung (b) unmöglich.

Von den Subtractionsregeln in II. 4 gelten für die Momente aufser dem 1. Satze, wie eine besondere Untersuchung darzuthun hat, noch die Sätze 3—5, 7, 9—12. Der 2. Satz: „Ist

$$\mathfrak{u}(f) + \mathfrak{u}(g) = \mathfrak{u}(f) + \mathfrak{u}(g_1),$$

so hat man

$$\mathfrak{u}(g) = \mathfrak{u}(g_1)\text{“}$$

gilt sicher nur, wenn $\lim (g:f)$ nicht Null ist. Von den Formeln

6) $$\{\mathfrak{u}(f) + \mathfrak{u}(g)\} - \mathfrak{u}(g) = \mathfrak{u}(f),$$

8) $$\{\mathfrak{u}(f) + \mathfrak{u}(h)\} - \{\mathfrak{u}(g) + \mathfrak{u}(h)\} = \mathfrak{u}(f) - \mathfrak{u}(g)$$

setzt die erstere voraus, dafs $\lim (f:g)$ nicht Null sei; die letztere neben $\mathfrak{u}(f) > \mathfrak{u}(g)$, dafs nicht zugleich

$$\lim (f:h) \quad \text{und} \quad \lim (g:h)$$

verschwinden. Dann sind nämlich die Differenzen auch auf den linken Seiten möglich. — Die Formeln (13)—(17) in II. 5 bestehen auch für die Momente.

Die Summe $\mathfrak{u}(f) + \mathfrak{u}(f) + \ldots$ (n-mal) d. i. $\mathfrak{u}(nf)$ heifst das n-fache von $\mathfrak{u}(f)$. Wenn

$$\mathfrak{u}(g) < \mathfrak{u}(f),$$

so giebt es nicht immer eine natürliche Zahl p, so dafs

$$p\mathfrak{u}(g) > \mathfrak{u}(f).$$

Denn ist

$$\lim (g:f) = 0,$$

so ist

$$\lim (pg:f) = 0,$$

was auch p sein mag.

Multiplication der Momente. Da neben

$$\lim f = \lim g = +0$$

auch

$$\lim fg = +0,$$

so können wir $\mathfrak{u}(fg)$ als das Product von $\mathfrak{u}(f)$ mit $\mathfrak{u}(g)$ erklären:

$$\mathfrak{u}(fg) = \mathfrak{u}(f) \cdot \mathfrak{u}(g). \qquad \text{(5. Def.)}$$

Dabei ist leicht nachzuweisen, dafs sämmtliche Regeln über die Multiplication der absoluten Zahlen in II. 6 und 7 auch für die der Momente gelten.

Die Gleichung

$$\mathfrak{u}(g) \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{u}(f) \qquad \text{(c)}$$

hat eine (und dann nur eine) Lösung

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{u}(f:g),$$

blofs wenn $\lim (f:g) = 0$ ist.

23. Erweiterung des Systemes der Momente. Wie wir soeben bemerkten, ist die Division der Momente nicht unbedingt möglich. Da aber hinsichtlich der Multiplication der Momente die Annahmen A), B), C), D_1), E) in III. 1—5 bestehen, so können wir die Sätze VI), VII) in III. 7, 10 anwenden.

6. Definition. „In dem Falle, wo $\lim (f:g)$ eine positive Zahl oder $+\infty$ ist, soll ein von den Momenten verschiedenes Ding, mit $\mathfrak{u}(f):\mathfrak{u}(g)$ bezeichnet, existiren, welches der Gleichung

$$\mathfrak{u}(g)\cdot\{\mathfrak{u}(f):\mathfrak{u}(g)\} = \mathfrak{u}(f)$$

genügt.

7. Definition. „Es sei $\mathfrak{u}(f):\mathfrak{u}(g)$ gleich, gröfser, kleiner als $\mathfrak{u}(f_1):\mathfrak{u}(g_1)$, je nachdem $\mathfrak{u}(f)\cdot\mathfrak{u}(g_1)$ gleich, gröfser, kleiner als $\mathfrak{u}(f_1)\cdot\mathfrak{u}(g)$ d. h. je nachdem $\lim (fg_1 : f_1 g)$ gleich, gröfser, kleiner als 1. — Ferner sei $\mathfrak{u}(f):\mathfrak{u}(g)$ gröfser als jedes Moment $\mathfrak{u}(f_1)$." — Letzteres folgt unmittelbar nach der 4. Def. in III. 10, da

$$\mathfrak{u}(f) > \mathfrak{u}(f_1)\,\mathfrak{u}(g)$$

wegen

$$\lim (f:f_1 g) = +\infty.$$

Die Producte der neuen Gröfsen sind zu bilden nach den Formeln

8. Definition.

$$\{\mathfrak{u}(f):\mathfrak{u}(g)\}\cdot\mathfrak{u}(h) = \mathfrak{u}(fh):\mathfrak{u}(g),$$

$$\{\mathfrak{u}(f):\mathfrak{u}(g)\}\cdot\{\mathfrak{u}(f_1):\mathfrak{u}(g_1)\} = \mathfrak{u}(ff_1):\mathfrak{u}(gg_1).$$

Es steht nunmehr nichts im Wege, die Gröfse

$$\mathfrak{u}(f):\mathfrak{u}(g),$$

wenn

$$\lim (f:g)$$

einen endlichen positiven Werth besitzt, mit dieser absoluten Zahl zu identificiren:

$$\mathfrak{u}(f):\mathfrak{u}(g) = \lim\,(f:g);$$

so dafs die **Erweiterung** des **Systemes** der **Momente** durch die absoluten Zahlen und die Gröfsen

$$\mathfrak{u}(f):\mathfrak{u}(g),$$

worin

$$\lim\,(f:g) = +\infty$$

ist, gebildet wird.

Damit ist die Addition im neuen Gröfsensysteme zum Theile schon gegeben. Diese Summen sind jedoch auch specielle Fälle der zweiten der Formeln

$$\mathfrak{u}(f):\mathfrak{u}(g) + \mathfrak{u}(h) = \mathfrak{u}(f+gh):\mathfrak{u}(g)$$

$$\mathfrak{u}(f):\mathfrak{u}(g) + \mathfrak{u}(f_1):\mathfrak{u}(g_1) = \mathfrak{u}(fg_1 + f_1 g):\mathfrak{u}(gg_1),$$

wodurch wir die neue Addition allgemein erklären. (9. Def.) Sie gelten offenbar, wenn die darin vorkommenden Quotienten sich auf Momente zurückführen lassen. Die erste Formel fällt, wenn

$$\mathfrak{u}(f):\mathfrak{u}(g)$$

eine neue Gröfse ist, zusammen mit der folgenden

$$\mathfrak{u}(f):\mathfrak{u}(g) + \mathfrak{u}(h) = \mathfrak{u}(f):\mathfrak{u}(g). \tag{d}$$

Denn wenn $\lim\,(f:g)$ nicht Null ist, so hat man stets

$$\lim \frac{f+gh}{g}\cdot\frac{g}{f} = \lim\left\{1 + \frac{g}{f}\cdot h\right\} = 1.$$

So sind wir auf arithmetischem Wege zu der Regel gelangt „Eine endliche Gröfse ändert sich nicht, wenn zu ihr eine unendlich kleine addirt wird.“

Mit diesen Formeln erhält man dieselbe Addition und Subtraction wie im Systeme der Momente, wovon man sich durch eine besondere Untersuchung zu überzeugen hat. Man wird u. A. leicht finden, dafs die Gleichung $\beta + \xi = \alpha$ — unter α, β Gröfsen des erweiterten Systemes verstanden — stets eine und nur eine Auflösung für ξ zuläfst, wenn $\alpha > \beta$. Wie die Formel (d) zeigt, so hat die Gleichung

$$\alpha + \xi = \alpha,$$

auch wenn α der neuen Art angehört, unzählige Auflösungen; denn man kann für ξ jedes Moment setzen. Somit ist jede Differenz $\alpha - \alpha$ unbrauchbar.

Man könnte glauben, dafs durch nochmalige Anwendung des Satzes VI in III. 7 das bisher erhaltene Gröfsensystem eine neue, den negativen Zahlen analoge Erweiterung erfahren werde. Das ist jedoch nicht der Fall. Denn neben den Differenzen $\alpha - \alpha$ müssen auch alle jene ausgeschlossen werden, welche beim Gebrauche der Formeln

$$(\alpha - \beta) + \gamma = (\alpha + \gamma) - \beta$$

$$(\alpha - \beta) + (\alpha' - \beta') = (\alpha + \alpha') - (\beta + \beta')$$

bereits als unmöglich erkannte Resultate liefern würden. Solche würden aber durch jede Differenz $\alpha - \beta$, worin $\alpha < \beta$, erzeugt vermöge der Formel

$$(\alpha - \beta) + (\beta - \alpha) = (\alpha + \beta) - (\alpha + \beta).$$

24. Zweite Theorie. Die Momente sind keineswegs die allein möglichen unendlich kleinen Gröfsen. Man kann vielmehr auch so vorgehen. Es sei gegeben ein System von Functionen $f(x)$, für welche ebenfalls bei dem oben festgesetzten Grenzübergange von x $\lim f(x) = +0$. Ferner soll jede Function

$$f_1(x)^{\mu_1},\quad f_2(x)^{\mu_2}, \quad \ldots f_n(x)^{\mu_n},$$

worin μ_1, $\mu_2 \ldots \mu_n$ beliebige rationale Zahlen sein können, bei demselben Grenzübergange von x einen Grenzwerth haben. Wir sagen dann, $\mathfrak{u}(f)$ soll gleich, gröfser oder kleiner als $\mathfrak{u}(g)$ sein, je nachdem $\lim (f:g)$ eine positive endliche Zahl, 0 oder $+\infty$ ist. Als die Summe $\mathfrak{u}(f) + \mathfrak{u}(g)$ betrachten wir jetzt $\mathfrak{u}(fg)$, woraus sich leicht ergiebt, dafs dieses System $\mathfrak{u}(f)$ zu den absoluten Gröfsen im weiteren Sinne gehört (V. 1). Auch hier können wir von dem in Nr. 22 erwähnten speciellen Systeme von Functionen $f(x)$ ausgehen und haben dann die nämliche Bemerkung zu machen, wie dort.

Dabei ergiebt sich zunächst, dafs die neuen Gröfsen dem Axiome des Archimedes nicht immer gehorchen. $a = 0$ setzend, hat man

$$\mathfrak{u}(x) < \mathfrak{u}\left(e^{-\frac{1}{x}}\right)$$

und

$$p\,\mathfrak{u}(x) = \mathfrak{u}(x^p) < \mathfrak{u}\left(e^{-\frac{1}{x}}\right),$$

was auch p für eine natürliche Zahl sein mag (vgl. (i) in Nr. 11).

Verstärkt man das obige System $f(x)$ noch durch die Functionen $e^{-\frac{1}{f(x)}}$ und hebt aus den zugehörigen $\mathfrak{u}$-Gröfsen das zusammenhängende System $\mathfrak{u}(x^\mu)$ — $0 < \mu \lesseqgtr 1$ heraus, so zeigen die Gruppen $\mathfrak{u}(x^\mu)$ — $\mu > 1$ — und $\mathfrak{u}(x^\mu)$ — $\mu < 1$ — einen Schnitt desselben an. Diese Lücke wird aber nicht nur geschlossen durch die Gröfse $\mathfrak{u}(x)$, sondern auch durch alle Gröfsen $\mathfrak{u}(g_n)$, wo

$$g_n(x) = x^{\frac{1}{1+\lambda_n(x)}} \qquad (n \geqq 2).$$

Denn für diese Functionen ergiebt sich in der That bei $\lim x = +0$

$$\lim \frac{g_n(x)}{x^\mu} = +\infty \quad \text{oder } +0,$$

je nachdem $\mu >$ oder < 1;

$$\lim \frac{g_n(x)}{x} = 0 \qquad (n \geqq 2)$$

und

$$\lim \frac{g_m(x)}{g_n(x)} = 0 \qquad (m < n).$$

Eine Multiplication ist für dieses System von unendlich kleinen Gröfsen bisher nicht aufgestellt worden.

25. Die vorstehenden Entwickelungen lassen sich unmittelbar übertragen auf die Unendlich der Functionen d. h. auf Gröfsen $\mathfrak{u}(F)$, welche den gehörig auszuwählenden Functionen $F(x)$, wofür $\lim F(x) = +\infty$, zugeordnet werden. Die zweite Theorie der Unendlich hat P. du Bois-Reymond ausgebildet und insbesondere auf die Eigenthümlichkeiten dieses Gröfsensystemes gegenüber den absoluten Gröfsen im engeren Sinne aufmerksam gemacht.[22])

Aus den unendlich kleinen Gröſsen und den Unendlich der zweiten Art läſst sich ein System von relativen Gröſsen im weiteren Sinne ableiten, indem man noch den Functionen $\varphi(x)$, wofür $\lim \varphi(x)$ eine positive endliche Zahl ist, eine Gröſse 0 zuordnet und die Formel

$$\mathfrak{u}(f) + \mathfrak{u}(g) = \mathfrak{u}(fg)$$

für die Functionen $f(x)$, $F(x)$, $\varphi(x)$ ohne Unterschied gelten läſst.

X. Abschnitt.

Die unendlichen Reihen mit reellen Gliedern.

1. Convergente Reihen. Es sei eine unbegrenzte Folge von reellen Zahlen $a_0, a_1, a_2 \ldots a_n \ldots$ gegeben d. h. eine Vorschrift, nach welcher man beliebig viele derselben bestimmen und anordnen kann. Bilden wir die Partialsummen

$$s_0 = a_0, \qquad s_1 = a_0 + a_1, \qquad s_2 = a_0 + a_1 + a_2 \ldots,$$
$$s_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1} + a_n,$$

wofür man auch schreibt

$$s_n = \sum_0^n {}^p a_p;$$

so entsteht die Frage, wie verhält sich s_n beim Grenzübergang $\lim n = +\infty$. Es ist leicht nachzuweisen, dafs hierbei alle jene Fälle eintreten können, die in IX. 7 unterschieden sind.

Wenn $\lim s_n$ bei $\lim n = +\infty$ eine endliche Zahl a ist, so heifst die unendliche Reihe $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$ convergent, a der Grenzwerth derselben. a als die „Summe" der unendlich vielen Glieder $a_0, a_1, \ldots$ zu erklären, ist, wie sich in Nr. 8 zeigen wird, nicht immer zulässig. Schreibt man, was manchmal bequem ist,

$$(1) \qquad a = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots = \sum_0^\infty {}^n a_n,$$

so soll das im Allgemeinen nichts Anderes besagen, als dafs bei $\lim n = +\infty$ $\lim s_n = a$, d. h. dafs zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\mu > 0$ gehört, so dafs für alle $n > \mu$

$$|s_n - a| < \varepsilon.$$

Die notwendige und hinreichende Bedingung, dafs $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$ convergent sei, besteht darin, dafs zu jeder positiven Zahl ε eine positive Zahl μ gehöre, in der Art, dafs wenn $n > \mu$

$$(2) \qquad |a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+r}| < \varepsilon,$$

was für eine natürliche Zahl auch r sein mag:

$$r = 1, 2 \ldots$$

Der Satz folgt unmittelbar aus IX. 8. Denn dazu, dafs $\lim s_n = a$ bei $\lim n = +\infty$, ist notwendig und hinreichend, dafs für alle $n > \mu$

$$|s_{n+r} - s_n| < \varepsilon$$

sei, wobei r alle Werthe 1, 2 ... annehmen kann. Es ist aber

$$s_{n+r} - s_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+r}.$$

Aus (2) folgt für $r = 1$

$$|a_{n+1}| < \varepsilon,$$

wenn nur $n > \mu$. D. i.

$$\lim_{n=+\infty} a_n = 0.$$

Zur Convergenz von $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$ ist notwendig, jedoch nicht hinreichend, dafs das allgemeine Glied der Reihe a_n bei $\lim n = +\infty$ den Grenzwerth Null hat. Das Zutreffen der Bedingung $\lim a_n = 0$ bei $\lim n = +\infty$ ist zur Convergenz der Reihe (1) nicht hinreichend, wie einfache Beispiele zeigen. Wir werden sogleich sehen, dafs für die harmonische Reihe

$$(3) \quad s_1 = 1, \quad s_2 = 1 + \frac{1}{2}, \ldots \; s_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n},$$

$$\lim_{n=+\infty} s_n = +\infty.$$

Beispiele convergenter Reihen.

1) Die unendliche geometrische Reihe

$$1 + x + x^2 + \dots$$

convergirt dann und nur dann, wenn x dem absoluten Betrage nach kleiner als 1 ist, und zwar ist ihr Grenzwerth $\frac{1}{1-x}$.

Man hat nach VIII. 1, Gl. (III)

$$s_n = 1 + x + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x}. \tag{4}$$

Setzen wir $|x| = X$ und nehmen zunächst an, es sei $X < 1$, also

$$X = 1 : (1 + d),$$

wo $d > 0$. Dann ist nach VIII. 2

$$\left|\frac{1}{1-x} - s_n\right| \leqq \frac{X^{n+1}}{1-X} = \frac{1}{d\,(1+d)^n} < \frac{1}{d\,(1+nd)};$$

somit

$$\left|\frac{1}{1-x} - s_n\right| < \varepsilon,$$

wenn nur

$$n > \frac{1 - d\varepsilon}{d^2\varepsilon}.$$

Wir finden also

$$\lim_{n=+\infty} s_n = \frac{1}{1-x} \qquad (-1 < x < +1).$$

Ist $X \geqq 1$, so kann die unendliche geometrische Progression nicht convergiren, da $|x^n| \geqq 1$.

2) Es sei

$$a_0 = b_0 - b_1, \quad a_1 = b_1 - b_2, \dots a_n = b_n - b_{n+1},$$

so ist

$$s_n = b_0 - b_{n+1}.$$

Die Reihe

$$(b_0 - b_1) + (b_1 - b_2) + \dots$$

convergirt dann und nur dann, wenn b_n bei $\lim n = +\infty$ einen endlichen Grenzwerth b hat. Und zwar ist

$$\lim_{n=+\infty} s_n = b_0 - b.$$

Falls $b = 0$ ist, so ist der Grenzwerth der in Rede stehenden Reihe die Zahl b_0 selbst. — Vermittelst der soeben abgeleiteten Formeln kann man die Grenzwerthe mancher Reihen finden. Setzt man z. B.

$$b_0 = 1, \quad b_1 = \tfrac{1}{2},\ b_2 = \tfrac{1}{3}, \ldots\ b_n = \frac{1}{n+1},$$

so ergiebt sich

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$$

2. Divergente Reihen. Hat s_n bei $\lim n = +\infty$ keinen endlichen Grenzwerth, so heifst die unendliche Reihe $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$ divergent. Dabei können die s_n bei $\lim n = +\infty$ folgendes Verhalten aufweisen.

1) $$\lim_{n=+\infty} s_n = +\infty \quad \text{oder} \quad -\infty.$$

Auch hier ist es voreilig zu sagen, die genannte Reihe habe eine unendliche Summe (vgl. Nr. 8).

2) s_n hat bei $\lim n = +\infty$ zwei verschiedene Unbestimmtheitsgrenzen, von denen eine oder auch beide unendlich sein können. Sind sie beide endliche Zahlen, O die obere, U die untere Unbestimmtheitsgrenze, so sagt man, die Reihe $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$ schwanke bei $\lim n = +\infty$ zwischen den Grenzen O und U und nennt $O - U$ den Betrag der Schwankung.

Beispiele. 1) Die unendliche geometrische Reihe

$$1 + x + x^2 + \ldots$$

hat den Grenzwerth $+\infty$, falls $x > 1$; sie schwankt bei $\lim n = +\infty$ zwischen den Grenzen 0 und 1, falls $x = -1$; und zwischen $-\infty$ und $+\infty$, falls $x < -1$.[1])

Die Sätze folgen aus (4) unmittelbar. Nur wenn $x = +1$ oder -1 betrachte man die Reihe unmittelbar. Im ersten Falle ist

$$s_n = n + 1;$$

im letzteren

$$s_{2k} = 1, \quad s_{2k+1} = 0 \qquad (k = 0, 1, 2 \ldots).$$

2) Die im zweiten Beispiele der vorigen Nummer betrachtete Reihe

$$(b_0 - b_1) + (b_1 - b_2) + \ldots$$

divergirt zufolge der Formel $s_n = b_0 - b_{n+1}$, wenn $\lim b_n$ bei $\lim n = +\infty$ oder $-\infty$ ist und wenn die Unbestimmtheitsgrenzen von b_n bei $\lim n = +\infty$ von einander verschieden sind.

3) Für die Reihe

$$a_{2k} = b_k, \quad a_{2k+1} = -b_{k+1} \qquad (k = 0, 1, 2 \ldots)$$

d. i.

$$(5) \qquad b_0 - b_1 + b_1 - b_2 + b_2 - \ldots$$

ist

$$s_0 = b_0$$

und überhaupt

$$s_{2k} = b_0; \qquad s_1 = b_0 - b_1$$

und

$$s_{2k+1} = b_0 - b_{k+1}.$$

Hat b_k bei $\lim k = +\infty$ einen endlichen Grenzwerth $b \gtrless 0$, so schwankt die Reihe (5) bei $\lim n = +\infty$ zwischen $b_0 - b$ und b_0; hat b_k bei $k = +\infty$ den Grenzwerth $\pm\infty$, so schwankt sie zwischen $\mp\infty$ und b_0. — Nur wenn

$$\lim_{k=+\infty} b_k = 0$$

ist, so convergirt die Reihe (5) und zwar zum Grenzwerthe b_0.

3. Allgemeine Sätze über die unendlichen Reihen. Der Kürze wegen mögen als gleichartig bezeichnet werden Reihen, die convergent sind, solche die denselben unendlichen und solche die gar keinen Grenzwerth haben.

1) „Ist

$$a_n = b_n \qquad (n = 0, 1, 2 \ldots),$$

so sind gleichartig die Reihen

$$(6) \qquad a_0 + a_1 + a_2 \ldots, \qquad b_0 + b_1 + b_2 + \ldots\text{“}$$

Denn setzt man

$$b_0 + b_1 + b_2 + \ldots + b_n = t_n,$$

so ist

$$s_n = t_n.$$

„Convergirt insbesondere die erste der Reihen, so auch die zweite und beide haben denselben Grenzwerth.“

2) „Ist in den convergenten Reihen (6) $a_n \geqq b_n$, jedoch nicht durchaus $a_n = b_n$, so ist $a > b$, unter b $\lim t_n$ bei $n = +\infty$ verstanden.“ — Wenn nämlich $a_m > b_m$, so hat man für $n \geqq m$

$$s_n \geqq t_n + (a_m - b_m),$$

also

$$a \geqq b + (a_m - b_m),$$

d. i.

$$a > b.$$

3) „Die Reihe $a_0 + a_1 + \ldots$ und jede Reihe, die aus ihr durch Weglassung einer endlichen Anzahl von Gliedern, deren Summe s sei, hervorgeht, sind gleichartig. — Convergirt die erstere, so auch die letztere, und umgekehrt. Bedeuten a, a' ihre Grenzwerthe, so ist $a = a' + s$. Läſst man insbesondere die $(m + 1)$ Anfangsglieder $a_0, a_1, \ldots a_m$ weg, so erhält man die Reihe

$$a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots,$$

deren Grenzwerth r_m ein Rest der Reihe heiſst. Dabei hat man

$$a = s_m + r_m.$$

Auch ist $\lim r_m = 0$ bei $\lim m = +\infty$.“

Setzt man nämlich

$$a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_{m+p} = r_{m,p},$$

so ist

$$s_{m+p} = s_m + r_{m,p},$$

und wenn bei $\lim p = +\infty$

$$\lim s_{m+p} = a,$$

so hat man

$$r_m = \lim r_{m,p} = a - s_m.$$

Daſs zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\mu > 0$ gehört, derart, daſs für $n > \mu$

$$|r_n| < \varepsilon,$$

ist leicht einzusehen nach (2) und IX. 9, II.

Zufolge dieses Satzes kann eine Reihe, welche nur Glieder mit einem Zeichen in unbegrenzter Anzahl enthält, auf eine solche zurückgeführt werden, welche nur Glieder mit diesem Zeichen enthält.

4) Eine convergente Reihe $a_0 + a_1 + a_2 + \dots$ ist unbedingt associativ, d. h. leitet man aus ihr eine neue dadurch ab, dafs man ihre Glieder gruppenweise vereinigt, jedoch in der Weise, dafs jede Gruppe nur unmittelbar aufeinander folgende Glieder der ursprünglichen Reihe enthält, so ist auch die neue Reihe convergent und hat denselben Grenzwerth wie die gegebene. Man setze also

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_0 + a_1 \qquad\qquad + \dots + a_{m_1} = A_1 \\ a_{m_1+1} + a_{m_1+2} \quad + \dots + a_{m_2} = A_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m_{n-1}+1} + a_{m_{n-1}+2} + \dots + a_{m_n} = A_n \end{array} \right.$$

$$A_1 + A_2 + \dots + A_n = S_n;$$

so ist

$$\lim S_n = \lim s_n$$

bei $\lim n = +\infty$, da

$$S_1 = s_{m_1}, \quad S_2 = s_{m_2}, \dots S_n = s_{m_n}.$$

Sind die Glieder der convergenten Reihe $A_1 + A_2 + \dots$ algebraische Summen wie (7) und man läfst die Klammern weg, so dafs man die Reihe $a_0 + a_1 + a_2 + \dots$ erhält, so braucht die letztere nicht zu convergiren.[2]) So ist die Reihe $(b_0 - b_1) + (b_1 - b_2) + \dots$ in Nr. 1 convergent, wenn bei $\lim n = +\infty$ $\lim b_n$ endlich ist; die Reihe (5):

$$b_0 - b_1 + b_1 - b_2 + b_2 - \dots$$

aber nur dann, wenn $\lim b_n = 0$. — Ist aber die neue Reihe $a_0 + a_1 + a_2 + \dots$ convergent, so hat sie nach obigem Satze denselben Grenzwerth wie $A_1 + A_2 + \dots$

Das Weglassen der Klammern in $A_1 + A_2 + \dots$ ist stets gestattet, falls bei $\lim n = +\infty$ $\lim a_n = 0$ und die

Anzahl der in $A_n (n = 1, 2 \ldots)$ stehenden Glieder unter einer endlichen Zahl q liegt. — Denn ist $\lim S_n = A$, so existirt eine Zahl $\mu > 0$, so dafs $|S_n - A| < \varepsilon$ und $|a_n| < \varepsilon$ für $n > \mu$. Demnach folgt

$$|s_p - A| < (q + 1)\varepsilon,$$

wenn nur $p > m_n$, unter n irgend eine ganze Zahl $> \mu$ verstanden.

Als Beispiel einer associativen Umformung diene der folgende, oft benutzte Satz: „Wenn die Zahlen b_n, c_n bei $\lim n = +\infty$ je einen endlichen Grenzwerth b, c haben und wenn die unendliche Reihe

$$\sum_1^\infty {}^r (b_r - b_{r-1}) c_r$$

convergirt, so convergirt auch die unendliche Reihe

$$\sum_0^\infty {}^r b_r (c_r - c_{r+1})$$

und zwar hat man

$$b_0 c_0 + \sum_1^\infty {}^r (b_r - b_{r-1}) c_r = \sum_0^\infty {}^r b_r (c_r - c_{r+1}) + bc.\text{“}$$

Er folgt sofort aus der Identität

$$b_0 c_0 + \sum_1^n {}^r (b_r - b_{r-1}) c_r = \sum_1^{n-1} {}^r b_r (c_r - c_{r+1}) + b_n c_n$$

durch den Grenzübergang $\lim n = +\infty$.

5) „Ist k eine von Null verschiedene Constante, so sind die Reihen

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots, \quad ka_0 + ka_1 + ka_2 + \ldots$$

gleichartig. — Convergirt die erstere und zwar zum Grenzwerthe a, so convergirt die letztere zum Grenzwerthe ka.“

6) „Convergiren zwei Reihen wie (6), so convergirt auch die Reihe

$$(a_0 \pm b_0) + (a_1 \pm b_1) + \ldots + (a_n \pm b_n) + \ldots$$

und zwar ist ihr Grenzwerth $a \pm b$, wobei gesetzt ist

$$\lim_{n=+\infty} s_n = a, \quad \lim_{n=+\infty} t_n = b.\text{“}$$

Denn es ist

$$(a_0 \pm b_0) + (a_1 \pm b_1) + \ldots + (a_n \pm b_n) = s_n \pm t_n.$$

Daraus folgt, dafs wenn eine der beiden Reihen (6) divergirt, auch die Reihe

$$(a_0 \pm b_0) + (a_1 \pm b_1) + \ldots.$$

divergiren mufs.

Und weiter ergiebt sich aus dem Satze unmittelbar, dafs er auf jede endliche Anzahl von convergenten unendlichen Reihen ausgedehnt werden kann.

4. Reihen mit positiven Gliedern. Wir wenden uns nun zu solchen unendlichen Reihen, die nur gleichbezeichnete Glieder enthalten, wobei es zufolge des 5. Satzes der vorigen Nr. genügt anzunehmen, dafs alle Glieder positiv sind.

Satz. Wenn die Reihe $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots.$ nur positive Glieder enthält, so hat sie entweder einen endlichen Grenzwerth a oder den Grenzwerth $+\infty$. Im ersteren Falle hat man noch $a > s_n$.

Denn jetzt ist, falls $r \geqq 1$, $s_{n+r} > s_n$, so dafs hier unmittelbar der Satz von IX. 6 angewendet werden kann. Die Reihe $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$ convergirt also immer, wenn eine positive Zahl B existirt, so dafs für jeden Werth von n $s_n < B$. Und umgekehrt: Convergirt die genannte Reihe, so mufs eine Zahl $B > 0$ existiren, so dafs die Summe von beliebigen unter den Gliedern $a_0, a_1, \ldots.$ unter B liegt — ein Satz, der nicht für jede convergente Reihe gilt.

Beispiel. Die harmonische Reihe

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \ldots + \tfrac{1}{n} + \ldots. \tag{8}$$

ist divergent, hat also den Grenzwerth $+\infty$.

Man beweist diesen Satz durch die Bemerkung, dafs ($k \geqq 2$)

$$\frac{1}{2^{k-1}+1} + \frac{1}{2^{k-1}+2} + \ldots + \frac{1}{2^k - 1} + \frac{1}{2^k} > \frac{2^k - 2^{k-1}}{2^k} = \frac{1}{2}.$$

Demnach ist, wenn $n \geqq 2^k$,

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} > 1 + \frac{k}{2},$$

es kann somit s_n hier gröſser werden, als jede positive Zahl.

Es giebt kein allgemeines Verfahren, nach welchem entschieden werden könnte, ob eine beliebig vorgelegte Reihe aus positiven Gliedern convergent oder divergent ist. Man sucht die Lösung der Frage häufig durch Vergleichung der vorgelegten Reihe mit anderen, deren Verhalten bereits bekannt ist, herbeizuführen. Hierzu dienen die folgenden einfachen Sätze, die vermöge des besonderen, in dem Eingangs erwähnten Satze ausgesprochenen Charakters der Reihen mit positiven Gliedern immer paarweise auftreten.

Es seien

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots, \quad b_0 + b_1 + b_2 + \ldots.$$

Reihen mit positiven Gliedern. Ihre Grenzwerthe, wenn sie convergiren, werden mit a, b bezeichnet.

1) „Ist $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$ convergent und von einem bestimmten Werthe von $n\,(m)$ an $b_{n+l} < a_{n+k}$, wo $k\,l$ wie stets im folgenden constante ganze Zahlen mit Einschluſs der 0 bedeuten, so convergirt auch die Reihe

$$b_0 + b_1 + b_2 + \ldots\ldots``$$

„Ist aber die erstere Reihe divergent und für

$$n \geqq m \qquad b_{n+l} \geqq a_{n+k},$$

so divergirt auch die letztere Reihe".

Im ersten Falle hat man nämlich

$$t_{n+l} - t_{m+l-1} < s_{n+k} - s_{m+k-1},$$

also

$$t_{n+l} < a + t_{m+l-1} - s_{m+k-1};$$

somit convergirt $b_0 + b_1 + b_2 + \ldots.$ Im zweiten Falle ist

$$t_{n+l} > s_{n+k} + t_{m+l-1} - s_{m+k-1};$$

also wegen $\lim s_n = +\infty$ bei $\lim n = +\infty$ auch $\lim t_n = +\infty$.

Anwendung. „Ist für die unendliche Reihe

$$a_0 + a_1 + \ldots$$

bei $\lim n = +\infty$ $\lim n a_{n+k} > 0$ (bez. $+\infty$), so divergirt sie." — Denn setzt man $\lim n a_{n+k} = \alpha$, so gehört zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\mu > 0$, so dafs für alle $n > \mu$

$$n a_{n+k} > \alpha - \varepsilon \qquad a_{n+k} > \frac{\alpha - \varepsilon}{n}.$$

Nimmt man $\varepsilon < \alpha$ an, so folgt aus der Divergenz von (8) unmittelbar die der vorgelegten Reihe. So divergirt die allgemeine harmonische Reihe d. i. die Reihe mit dem allgemeinen Gliede

$$a_n = \frac{\alpha}{\alpha n + \beta},$$

wo α β irgendwelche reelle Zahlen sein können. Denn es ist $\lim n a_n = 1$.

Man glaubte einst, dafs alle Reihen, wofür $\lim n a_n = 0$ ist, convergiren, was Abel durch den Hinweis auf die divergente Reihe

$$\frac{1}{2\log 2} + \frac{1}{3\log 3} + \dots + \frac{1}{n\log n} + \dots$$

(vgl. Nr. 16) widerlegte. Bei dieser Gelegenheit bemerkte Abel, dafs überhaupt keine Function $\varphi(n)$ existiren könne, derart dafs die Reihe $a_0 + a_1 + \dots$ convergire, wenn

$$\lim a_n \varphi(n) = 0,$$

dagegen divergire, wenn dieser Grenzwerth positiv ist.[3])

2) „Ist $a_0 + a_1 + \dots\dots$ convergent und für alle $n \geqq m$

$$\frac{b_{n+l+1}}{b_{n+l}} \leqq \frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}},$$

so convergirt auch die Reihe $b_0 + b_1 + \dots\dots$"

„Ist die erstere Reihe divergent und für alle $n \geqq m$

$$\frac{b_{n+l+1}}{b_{n+l}} \geqq \frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}},$$

so divergirt auch die Reihe $b_0 + b_1 + \dots$"

Um den ersten Satz zu zeigen, bemerke man, dafs wenn $n > m$,

$$\frac{b_{m+l+1}}{b_{m+l}} \leqq \frac{a_{m+k+1}}{a_{m+k}}, \quad \frac{b_{m+l+2}}{b_{m+l+1}} \leqq \frac{a_{m+k+2}}{a_{m+k+1}}, \dots\dots$$

$$\frac{b_{n+l}}{b_{n+l-1}} \leqq \frac{a_{n+k}}{a_{n+k-1}},$$

somit

$$\frac{b_{n+l}}{b_{m+l}} \leqq \frac{a_{n+k}}{a_{m+k}} \quad \text{d. i.} \quad b_{n+l} \leqq \frac{b_{m+l}}{a_{m+k}} a_{n+k}. \tag{9}$$

Nun convergirt die Reihe $a_{m+k+1} + a_{m+k+2} + \ldots$; folglich nach dem 5. Satze in Nr. 3 auch

$$\frac{b_{m+l}}{a_{m+k}} a_{m+k+1} + \frac{b_{m+l}}{a_{m+k}} a_{m+k+2} + \ldots;$$

und zufolge des vorstehenden Satzes die Reihe

$$b_{m+l+1} + b_{m+l+2} + \ldots;$$

somit convergirt auch $b_0 + b_1 + b_2 + \ldots$.

Der zweite Satz folgt auf ähnliche Weise durch die Bemerkung

$$b_{n+l} \geqq \frac{b_{m+l}}{a_{m+k}} a_{n+k}. \tag{10}$$

Anwendung. „Es sei $a_0, a_1, a_2 \ldots a_n$ eine Folge positiver Zahlen; wofür $\lim (a_{n+k+1} : a_{n+k})$ bei $\lim n = +\infty$ existirt. Ist dieser Grenzwerth kleiner als 1 (Null eingeschlossen), so nehmen die a_n von einem bestimmten Werthe von n an mit wachsendem Index beständig ab und es ist $\lim\limits_{n=+\infty} a_n = 0$. Die Reihe $a_0 + a_1 + \ldots$ ist convergent."

„Wenn aber der genannte Grenzwerth gröſser als 1 ist ($+\infty$ eingeschlossen), so nehmen die a_n von einem bestimmten Werthe von n an mit dem Index beständig zu und es ist $\lim\limits_{n=+\infty} a_n = +\infty$. Die Reihe $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$ ist divergent."

Es sei zunächst

$$\lim (a_{n+k+1} : a_{n+k})$$

eine endliche Zahl λ. Dann gehört zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ ein Index m, so daſs für $n \geqq m$

$$\lambda - \varepsilon < \frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}} < \lambda + \varepsilon.$$

Ist $\lambda < 1$, so nehme man $\varepsilon < 1 - \lambda$ an, so daſs $\lambda + \varepsilon < 1$. Dann findet man so, wie (9), die Relation

$$n > m \qquad a_{n+k} < a_{m+k}(\lambda + \varepsilon)^{n-m},$$

also $\lim a_n = 0$. Und die Reihe $a_0 + a_1 + \ldots$ convergirt, da die geometrische Reihe

$$1 + (\lambda + \varepsilon) + (\lambda + \varepsilon)^2 + \ldots$$

convergirt. — Ist $\lambda > 1$, so nehme man $\varepsilon < \lambda - 1$, so dafs $\lambda - \varepsilon > 1$. Dann findet man so, wie (10), die Relation

$$n > m \qquad a_{n+k} > a_{m+k}(\lambda - \varepsilon)^{n-m},$$

also

$$\lim a_n = +\infty,$$

woraus die Divergenz der Reihe $a_0 + a_1 + \ldots$ unmittelbar hervorgeht. Der Schlufs ist ähnlich, wenn

$$\lim (a_{n+k+1} : a_{n+k}) = +\infty.$$

3) „Ist die Reihe $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$ convergent und sind $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2 \ldots \gamma_n$ positive Zahlen, die sämmtlich unter einer positiven Zahl C liegen, so convergirt auch die Reihe

$$a_0\gamma_0 + a_1\gamma_1 + a_2\gamma_2 + \ldots\text{“}$$

„Ist die Reihe $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$ divergent und sind $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2 \ldots \gamma_n$ positive Zahlen, die sämmtlich über einer positiven Zahl C' liegen, so divergirt auch die Reihe

$$a_0\gamma_0 + a_1\gamma_1 + a_2\gamma_2 + \ldots\text{“}$$

Der erste Theil folgt daraus, dafs wenn $0 < \gamma_n < C$,

$$a_0\gamma_0 + a_1\gamma_1 + \ldots + a_n\gamma_n < Cs_n < Ca;$$

der zweite daraus, dafs wenn $\gamma_n > C'$,

$$a_0\gamma_0 + a_1\gamma_1 + \ldots + a_n\gamma_n > C's_n.$$

5. Sätze über die Reihen mit positiven Gliedern.

1) „Hebt man aus den Gliedern der convergenten unendlichen Reihe

$$a = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots. \tag{1}$$

eine unendliche Folge von Gliedern

$$a_{k_0}, a_{k_1}, \ldots a_{k_n} \ldots$$

heraus, so bilden dieselben eine convergente Reihe. Ihr Grenzwerth ist kleiner als a.“

Denn man hat $a_{k_0} + a_{k_1} + \ldots + a_{k_n} < a$.

2) „Sind die Glieder einer convergenten Reihe

$$A = A_0 + A_1 + \ldots + A_n + \ldots$$

selbst Summen aus positiven Zahlen:

$$A_n = a_0^{(n)} + a_1^{(n)} + \ldots + a_{k_n}^{(n)} \quad (n = 0, 1 \ldots)$$

so convergirt auch die Reihe, die bei Weglassung der Klammern erscheint:

$$a_0^{(0)} + a_0^{(1)} + \ldots + a_{k_0}^{(0)} + a_0^{(1)} + \ldots + a_{k_1}^{(1)} + \ldots.“$$

Denn wie viele Glieder auch aus dieser Reihe addirt werden, so ist ihre Summe kleiner als A.

3) Jede convergente Reihe aus positiven Gliedern ist commutativ, d. h.: Bringt man ihre Glieder in irgend eine andere Anordnung, so convergirt die neue Reihe und hat denselben Grenzwerth wie die ursprüngliche.

Es seien

$$a_0' + a_1' + a_2' + \ldots. \tag{2}$$

die Glieder von (1) in irgend einer anderen Anordnung, so dafs in dieser Reihe jedes Glied von (1) steht, und umgekehrt. Setzt man

$$a_0' + a_1' + a_2' + \ldots + a_n' = s_n',$$

so folgt unmittelbar dafs $s_n' < a$; also convergirt die Reihe (2) und zwar sei a' ihr Grenzwerth. Und man weifs, zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ gehört eine Zahl $\mu > 0$, derart dafs für $n > \mu$

$$\left.\begin{array}{ll} & 0 < a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+r} < \varepsilon \\ \text{und} & 0 < a_{n+1}' + a_{n+2}' + \ldots + a_{n+r}' < \varepsilon. \end{array}\right\} \tag{3}$$

Betrachtet man nun zwei Partialsummen s_n, s_n', so werden sie einige Glieder gemein haben, deren Summe σ_n sei. Man findet also

$$s_n = \sigma_n + \varrho_n' \qquad s_n' = \sigma_n + \varrho_n,$$

wobei die in ϱ_n' vereinigten Glieder im Reste $a_{n+1}' + \ldots.$, die in ϱ_n im Reste $a_{n+1} + \ldots$ vorkommen müssen. Bildet man endlich

$$s_n' - s_n = \varrho_n - \varrho_n',$$

so ergiebt sich, dafs für alle $n > \mu$

$$0 < \varrho_n < \varepsilon \qquad 0 < \varrho_n' < \varepsilon,$$

also $|s_n' - s_n| < \varepsilon$. Somit ist $\lim\limits_{n=+\infty} (s_n' - s_n) = 0$ d. i. $a' = a$.

Noch einfacher ist es zu zeigen, dafs wenn (1) divergirt, auch (2) divergiren mufs.

4) „Vertheilt man die Glieder von (1) in eine endliche Anzahl von unendlichen (oder auch von theils endlichen, theils unendlichen) Reihen

$$\begin{array}{l} a_0^{(0)} + a_1^{(0)} + a_2^{(0)} + \cdots \\ a_0^{(1)} + a_1^{(1)} + a_2^{(1)} + \cdots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_0^{(m)} + a_1^{(m)} + a_2^{(m)} + \cdots \end{array}$$

so ist jede derselben convergent und die Summe ihrer Grenzwerthe gleich dem Grenzwerthe a von (1)."

Der Satz folgt aus dem 6. Satze in Nr. 3 und den soeben bewiesenen Sätzen unmittelbar. — Eine andere Frage ist, ob der Satz 4) auch noch gilt, wenn man die Glieder von (1) in eine unendliche Anzahl von Reihen vertheilt, was z. B. dadurch geschehen kann, dafs man in die erste Reihe a_0, a_1 und die Glieder mit geradem Index setzt, in die zweite die Glieder des Restes, deren Index durch 3 theilbar ist, in die dritte die Glieder des nunmehrigen Restes, deren Index durch 5 theilbar ist u. s. f. Mittelst des folgenden Hilfssatzes läfst sich jedoch nachweisen, dafs der 4. Satz auch jetzt noch besteht.

6. Hilfssatz. „Convergirt jede der in unbegrenzter Anzahl vorgelegten unendlichen Reihen

$$\begin{array}{l} a_0^{(0)} + a_1^{(0)} + a_2^{(0)} + \cdots + a_n^{(0)} + \cdots \\ a_0^{(1)} + a_1^{(1)} + a_2^{(1)} + \cdots + a_n^{(1)} + \cdots \\ a_0^{(2)} + a_1^{(2)} + a_2^{(2)} + \cdots + a_n^{(2)} + \cdots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_0^{(m)} + a_1^{(m)} + a_2^{(m)} + \cdots + a_n^{(m)} + \cdots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array} \qquad (4)$$

deren Glieder entweder positiv oder Null sind, und zwar bezüglich zu den Grenzwerthen $a^{(0)}, a^{(1)}, a^{(2)} \ldots a^{(m)} \ldots$; convergirt ferner die unendliche Reihe

$$a^{(0)} + a^{(1)} + a^{(2)} + \ldots + a^{(m)} + \ldots \qquad (5)$$

und zwar zum Grenzwerthe a; so convergirt auch die Reihe

$$d_0 + d_1 + d_2 + \ldots + d_n + \ldots, \tag{6}$$

worin

$$d_n = a_0^{(n)} + a_1^{(n-1)} + \ldots + a_r^{(n-r)} + \ldots + a_n^{(0)},$$

und zwar ebenfalls zum Grenzwerthe a. — Und umgekehrt: Convergirt die unendliche Reihe (6) und zwar zum Grenzwerthe a, so convergirt jede Reihe des Schema (4), und die aus ihren Grenzwerthen gebildete Reihe (5) convergirt ebenfalls und zwar zum Grenzwerthe a."

Beweis. 1. Theil. Es sei

$$d_0 + d_1 + \ldots + d_n = v_n.$$

Denkt man sich die $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ Glieder $a_n^{(m)}$ von v_n in Zeilen so geordnet, dafs in jeder der obere Index constant ist, so folgt unmittelbar

$$v_n \leqq a^{(0)} + a^{(1)} + \ldots + a^{(n)} < a.$$

Somit convergirt (6). — Es sei ferner

$$a^{(0)} + a^{(1)} + \ldots + a^{(n)} = s^{(n)};$$

so ist leicht ersichtlich, dafs

$$s^{(n)} = v_n + r_n, \tag{7}$$

worin r_n die unendliche Reihe mit dem allgemeinen Gliede

$$a_p^{(n)} + a_{p+1}^{(n-1)} + \ldots + a_{p+r}^{(n-r)} + \ldots + a_{p+n}^{(0)} \quad (p = 1, 2, \ldots)$$

bedeutet. Da dasselbe kleiner ist als d_{n+p}, so folgt

$$r_n < d_{n+1} + d_{n+2} + \ldots \tag{8}$$

d. i. $\lim r_n = 0$ für $\lim n = +\infty$. Somit ist

$$\lim (s^{(n)} - v_n) = 0$$

d. i.

$$\lim_{n=+\infty} v_n = a.$$

2. Theil. Da

$$a_n^{m)} < d_{m+n} \qquad (n = 0, 1, 2 \ldots),$$

so folgt aus der Convergenz von (6) unmittelbar die der Reihe

$$a_0^{(m)} + a_1^{(m)} + a_2^{(m)} + \ldots \quad (m = 0, 1, 2 \ldots).$$

Bezeichnet man ihren Grenzwerth, wie oben, mit $a^{(m)}$, so ist in (7) vermöge der Relation (8)

$$\lim r_n = 0 \quad \text{bei} \quad \lim n = +\infty,$$

also

$$\lim_{n=+\infty} s^{(n)} = \lim_{n=+\infty} v_n = a.$$

Zusatz. Aus dem zweiten Theile des vorstehenden Satzes folgt:

„Unter den über Schema (4) bestehenden Voraussetzungen convergirt jede der Verticalreihen desselben

$$a_n^{(0)} + a_n^{(1)} + a_n^{(2)} + \ldots \qquad (n = 0, 1, 2 \ldots);$$

die aus ihren Grenzwerthen a_0, a_1, $a_2 \ldots$ gebildete Reihe convergirt ebenfalls, und zwar ist ihr Grenzwerth die Zahl a."

7. Weitere Sätze über die Reihen mit positiven Gliedern.

1) „Es sei die Reihe mit positiven Gliedern

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$$

convergent und a ihr Grenzwerth. Vertheilt man ihre Glieder, ohne eines zu übergehen, in unendlich viele Reihen (4), so convergirt jede derselben und die aus ihren Grenzwerthen gebildete Reihe convergirt ebenfalls und zwar zum Grenzwerthe a."[4])

Denn nach dem 3. Satze in Nr. 5 convergirt die Reihe

$$a_0^{(0)} + a_1^{(0)} + a_0^{(1)} + \ldots$$

d. i.

$$d_0 + d_1 + d_2 + \ldots$$

und zwar zum Grenzwerthe a.

2) „Convergiren die unendlichen Reihen

$$a_0 + a_1 + \ldots + a_m + \ldots, \quad b_0 + b_1 + \ldots + b_n + \ldots$$

und zwar bez. zu Grenzwerthen a, b; so convergirt auch die unendliche Reihe

$$d_0 + d_1 + d_2 + \ldots,$$

worin

$$d_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_r b_{n-r} + \ldots + a_n b_0, \tag{9}$$

und zwar zum Grenzwerthe ab."[5])

Setzt man in der That in (4)

$$a_n^{(m)} = a_m b_n,$$

so convergiren nach dem 5. Satze in Nr. 3 die horizontalen Reihen bezüglich zu den Grenzwerthen $a_0 b$, $a_1 b, \ldots a_m b \ldots$ und die aus ihnen gebildete Reihe convergirt zum Grenzwerthe ab.

Die hier bewiesenen Sätze zeigen in Verbindung mit denen von Nr. 3—5, daſs man den Grenzwerth a einer convergenten unendlichen Reihe mit positiven Gliedern

$$a_0 + a_1 + \ldots$$

als die Summe der unbegrenzt vielen Zahlen $a_0, a_1 \ldots$ erklären kann. Er bleibt nämlich ungeändert, wenn man dieselben in beliebige Aufeinanderfolge bringt und sie vor dem letzten Grenzübergange $\lim m = +\infty$ in Gruppen von endlicher oder unendlicher Gliederzahl vereinigt. Auch bestehen die Sätze 1) und 2) in Nr. 3 gerade wie für Summen von endlicher Gliederzahl.

Nach dem zweiten Satze oben bleibt auch die distributive Eigenschaft des Productes zweier solchen Summen erhalten. Denn in der Reihe mit dem allgemeinen Gliede (9) kann man die Klammern, welche die Glieder $d_1, d_2 \ldots$ einschlieſsen, weglassen, so daſs man, um das Product ab zu bilden, die Partialproducte $a_m b_n$ in jeder beliebigen Ordnung aneinanderreihen kann. Auch kann man nach dem ersten Satze dieselben irgendwie in unendliche Reihen vertheilen, diese summiren und schlieſslich die Summe ihrer Summen bilden. Man drückt dies aus durch die Formel

$$\sum_0^\infty{}_m a_m \cdot \sum_0^\infty{}_n b_n = \sum_{m,\,n} a_m b_n, \quad \left.\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right\} = 0, 1, 2 \ldots$$

Sie läſst sich unmittelbar auf das Product einer jeden endlichen Anzahl von convergenten Reihen mit positiven Gliedern ausdehnen d. h. es ist

$$\sum_0^\infty{}_m a_m \cdot \sum_0^\infty{}_n b_n \cdot \sum_0^\infty{}_p c_p = \sum_{m,\,n,\,p} a_m b_n c_p, \quad \left.\begin{matrix} m \\ n \\ p \end{matrix}\right\} = 0, 1, 2 \ldots$$

u. s. f. In der That finden wir

$$ab \cdot \sum c_p = \sum_0^\infty{}_n e_n, \quad e_n = d_0 c_n + d_1 c_{n-1} + \ldots + d_n c_0,$$

so daſs das links stehende Product gleich ist der Summe aus allen Gliedern $a_m b_n c_p$, deren jedes eben einmal und nur einmal in der rechts stehenden Reihe auftritt.

Es wird sich nun zunächst darum handeln, ob und unter welchen Umständen auch die Grenzwerthe von convergenten unendlichen Reihen, welche sowohl positive als auch negative Glieder in unbegrenzter Anzahl enthalten, als Summen derselben betrachtet werden können. Und zwar wollen wir zuerst an einem einfachen Beispiele nachweisen, daſs das nicht immer zulässig ist.

8. Alternirende Reihen.

Satz.[5*]) „Die unendliche Reihe

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots + (-1)^n a_n + \ldots \qquad (10)$$

worin $a_0, a_1 \ldots a_n \ldots$ positive Zahlen bedeuten, convergirt, wenn diese Zahlen mit wachsendem Index beständig abnehmen und für $\lim n = +\infty$ den Grenzwerth 0 haben. Der Grenzwerth a der unendlichen Reihe (10) ist gröſser als jede Partialsumme aus einer geraden, kleiner als jede aus einer ungeraden Anzahl von Gliedern. Jeder Rest der Reihe ist seinem absoluten Betrage nach kleiner als sein erstes Glied."

Beweis. Es sei

$$a_n > a_{n+1} \quad (n = 0, 1, 2 \ldots)$$

und

$$\lim a_n = 0 \quad \text{bei} \quad \lim n = +\infty.$$

Wir setzen

$$a_0 - a_1 + a_2 - \ldots + (-1)^n a_n = s_n.$$

Da

$$\left.\begin{aligned} s_{2k} &= s_{2k-1} + a_{2k} = s_{2k-2} - (a_{2k-1} - a_{2k}) \\ s_{2k+1} &= s_{2k} - a_{2k+1} = s_{2k-1} + (a_{2k} - a_{2k+1}) \end{aligned}\right\} (k \geqq 1),$$

so ergiebt sich, daſs s_{2k} mit wachsendem k beständig abnimmt: $s_0 > s_2 > s_4 \ldots$ Dabei ist aber $s_{2k} > 0$, da $s_{2k-1} > 0$. Somit existirt ein endlicher Grenzwerth

$$a = \lim s_{2k} \quad \text{bei} \quad k = +\infty.$$

Es zeigt sich ferner, daſs s_{2k+1} mit wachsendem k beständig zunimmt:

$$s_1 < s_3 < s_5 \ldots,$$

während

$$s_{2k+1} < s_{2k} \leqq a_0.$$

Also existirt ein endlicher Grenzwerth

$$a' = \lim s_{2k+1} \quad \text{bei} \quad k = +\infty.$$

Nun ist $a = a'$, so daſs

$$s_{2k} > a > s_{2k+1} \quad (k = 0, 1, 2 \ldots).$$

Denn man findet zu $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\mu > 0$, so daſs für $k > \mu$ $a_{2k} < \varepsilon$, also

$$0 < s_{2k} - s_{2k-1} < \varepsilon,$$

d. i.

$$\lim_{k=+\infty} (s_{2k} - s_{2k-1}) = 0.$$

Setzt man endlich

$$a = s_n + r_n,$$

wo

$$r_n = (-1)^{n+1} \{a_{n+1} - a_{n+2} + \ldots\},$$

so folgt vermöge des soeben bewiesenen Satzes

$$0 < (-1)^{n+1} r_n < a_{n+1}.$$

Der Fehler, den man begeht, wenn man s_n anstatt a nimmt, ist absolut genommen kleiner, als das auf das letzte Glied in s_n folgende Glied der Reihe.

Beispiele.[6]) 1) Die unendliche Reihe

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \ldots \tag{a}$$

convergirt und ihr Grenzwerth a liegt zwischen $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ und $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$.[7]) Bringt man die Glieder derselben in die folgende Anordnung

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{4k-3} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{2k} + \ldots \tag{b}$$

so ist auch diese unendliche Reihe convergent.

Bezeichnen wir die Summe der n ersten Glieder von (b) mit s'_n und betrachten zunächst nur die Partialsummen s'_{3k} und s'_{3k+2}, so entstehen sie auch aus der alternirenden Reihe

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)-\frac{1}{4}+\dots$$
$$+\left(\frac{1}{4k-3}+\frac{1}{4k-1}\right)-\frac{1}{2k}+\dots \tag{b*}$$

Die Glieder derselben nehmen bei wachsendem Index beständig ab und sinken unter jede positive Zahl; denn es ist

$$\frac{1}{4k-3}+\frac{1}{4k-1}>\frac{1}{2k}>\frac{1}{4k+1}+\frac{1}{4k+3}.$$

Die Reihe (b*) convergirt somit und ihr Grenzwerth a' ist grösser als $1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$. Zugleich hat man

$$\lim s'_{3k}=\lim s'_{3k+2}=a' \quad \text{bei} \quad \lim k=+\infty$$

und wegen

$$s'_{3k+1}=s'_{3k}+\frac{1}{4k+1}$$

allgemein

$$\lim_{n=+\infty} s'_n=a'.$$

a' ist also der Grenzwerth der convergenten Reihe (b) und wie man sieht, von a verschieden: es hat sich der Grenzwerth der Reihe (a) bei der angegebenen Versetzung ihrer Glieder geändert.

Es ist leicht zu zeigen, dafs $a'=\frac{3}{2}a$. — Setzt man

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\dots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}=s_n,$$

so folgt

$$s_{4k}=\sum_1^k{}_r\left(\frac{1}{4r-3}-\frac{1}{4r-2}+\frac{1}{4r-1}-\frac{1}{4r}\right),$$

$$s'_{3k}=\sum_1^k{}_r\left(\frac{1}{4r-3}+\frac{1}{4r-1}-\frac{1}{2r}\right),$$

$$s'_{3k}-s_{4k}=\sum_1^k{}_r\left(\frac{1}{4r-2}-\frac{1}{4r}\right)=\frac{1}{2}\sum_1^{k-1}{}_r\left(\frac{1}{2r-1}-\frac{1}{2r}\right)=\frac{1}{2}s_{2k}.$$

Beim Grenzübergange $\lim k=+\infty$ ergiebt sich daraus

$$a'-a=\tfrac{1}{2}a,\qquad a'=\tfrac{3}{2}a.$$

2) Die unendliche Reihe

$$1-\frac{1}{\sqrt[m]{2}}+\frac{1}{\sqrt[m]{3}}-\dots+\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[m]{n}}+\dots \tag{c}$$

convergirt ebenfalls, die Wurzeln positiv genommen. Dagegen hat die Reihe

$$1 + \frac{1}{\sqrt[m]{3}} - \frac{1}{\sqrt[m]{2}} + \frac{1}{\sqrt[m]{5}} + \frac{1}{\sqrt[m]{7}} - \frac{1}{\sqrt[m]{4}} + \ldots$$

$$+ \frac{1}{\sqrt[m]{4k-3}} + \frac{1}{\sqrt[m]{4k-1}} - \frac{1}{\sqrt[m]{2k}} + \ldots \tag{d}$$

den Grenzwerth $+\infty$. Setzt man wieder

$$1 - \frac{1}{\sqrt[m]{2}} + \frac{1}{\sqrt[m]{3}} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[m]{n}} = s_n,$$

$$1 + \frac{1}{\sqrt[m]{3}} - \frac{1}{\sqrt[m]{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[m]{4k-3}} + \frac{1}{\sqrt[m]{4k-1}} - \frac{1}{\sqrt[m]{2k}} = s'_{3k};$$

so ist

$$s'_{3k} - s_{2k} = \frac{1}{\sqrt[m]{2k+1}} + \frac{1}{\sqrt[m]{2k+3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[m]{4k-1}},$$

somit

$$s'_{3k} - s_{2k} > \frac{k}{\sqrt[m]{4k}} = \frac{k^{1-\frac{1}{m}}}{\sqrt[m]{4}}$$

und

$$\lim_{n=+\infty} s'_{3k} = +\infty,$$

also wenn s'_n die Summe der n ersten Glieder in (d) bedeutet, wegen

$$s'_{3k+2} > s'_{3k+1} > s'_{3k}$$

auch

$$\lim_{n=+\infty} s'_n = +\infty.$$

9. **Reihen mit positiven und negativen Gliedern in unbegrenzter Anzahl.**

Die Reihe

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots \tag{1}$$

enthalte sowohl positive, als negative Glieder in unendlicher Anzahl. Die ersteren mögen, in der Ordnung angeschrieben wie sie in (1) vorkommen, die Reihe

$$b_0 + b_1 + b_2 + \ldots + b_p + \ldots \tag{2}$$

$(b_p > 0)$ bilden; die letzteren ebenso die Reihe

$$-c_0 - c_1 - c_2 \ldots - c_q - \ldots \tag{3}$$

$(c_q > 0)$. Setzt man

$$a_0 + a_1 + \dots + a_n = s_n$$
$$b_0 + b_1 + \dots + b_p = t_p$$
$$c_0 + c_1 + \dots + c_q = u_q,$$

so folgt zunächst

$$s_n = t_{p_n} - u_{q_n}. \tag{4}$$

Daraus ergiebt sich, indem bei $\lim n = +\infty$ auch

$$\lim p_n = \lim q_n = +\infty,$$

sogleich das Folgende:

1) Convergiren die Reihen (2) und (3) und zwar zu den Grenzwerthen b, $-c$; so convergirt auch (1) und zwar ist der Grenzwerth der Reihe (1) $b - c$.

2) Convergirt nur eine der Reihen (2), (3), so hat die Reihe (1) stets einen unendlichen Grenzwerth.

3) Divergiren beide Reihen (2), (3), so läfst sich aus der Formel (4) im Allgemeinen nichts entnehmen, da

$$\lim_{n=+\infty} t_{p_n} = \lim_{n=+\infty} u_{q_n} = +\infty.$$

In der That zeigen die Beispiele der vorigen Nummer, dafs in diesem Falle die Reihe (1) sowohl convergiren als divergiren kann.

Wir wenden uns nun zur Untersuchung der Frage, unter welchen Umständen eine unendliche Reihe bei jeder beliebigen Anordnung ihrer Glieder convergent ist und stets denselben Grenzwerth liefert.

Satz. Die nothwendige und hinreichende Bedingung dazu, dafs die unendliche Reihe $a_0 + a_1 + \dots$ bei jeder Anordnung ihrer Glieder convergirt und immer denselben Grenzwerth darbietet, besteht in der absoluten Convergenz derselben. D. h. die absoluten Beträge $|a_n|$ der Reihenglieder müssen eine convergente Reihe bilden.

Beweis. Dafs die genannte Bedingung hinreichend sei, ist leicht einzusehen. Convergirt die unendliche Reihe

$$|a_0| + |a_1| + \dots + |a_n| + \dots \tag{5}$$

so convergiren die Reihen (2), (3), somit auch (1). Bringt man ihre Glieder in eine andere Anordnung

$$a'_0 + a'_1 + \ldots + a'_n + \ldots, \tag{6}$$

wodurch an Stelle der Reihen (2), (3) die folgenden treten

$$b'_0 + b'_1 + b'_2 + \ldots, \qquad - c'_0 - c'_1 - c'_2 - \ldots;$$

so sind diese nach dem 3. Satze in Nr. 5 wieder convergent und haben dieselben Grenzwerthe wie (2) und (3). Man findet somit auch die Reihe (6) convergent und zwar dafür denselben Grenzwerth wie für (1), nämlich $b - c$.

Dafs die in Rede stehende Bedingung auch nothwendig sei, wird indirect bewiesen, indem wir zeigen, dafs wenn (5) divergirt, die Reihe (1) aber convergirt, die Glieder von (1) so angeordnet werden können, dafs der Grenzwerth der neuen Reihe irgend eine gegebene Zahl K ist.[8]) — Zunächst bemerken wir, dafs nun beide Reihen (5) divergiren müssen. Denn würde nur eine divergiren, so müfste (1) einen unendlichen Grenzwerth haben. Ferner ist

$$\lim a_n = 0 \quad \text{bei} \quad \lim n = +\infty,$$

d. h. zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ gehört eine Zahl $\mu > 0$, so dafs für

$$n > \mu \qquad |a_n| < \varepsilon. \tag{7}$$

Es sei $K \geqq 0$. Wegen der Divergenz von (2) kann man daraus so viele Glieder $b_0, b_1 \ldots b_{k_0}$ entnehmen, dafs

$$b_0 + b_1 + \ldots + b_{k_0 - 1} \leqq K, \quad B_0 = b_0 + b_1 + \ldots + b_{k_0} > K,$$

wobei k_0 auch 0 sein kann. Auf die Glieder, deren Summe mit B_0 bezeichnet ist, lasse man so viele Glieder $c_0, c_1, \ldots c_{l_0}$ aus (3) folgen, dafs

$$B_0 - c_0 - c_1 - \ldots - c_{l_0 - 1} \geqq K,$$
$$B_0 - c_0 - c_1 - \ldots - c_{l_0} < K.$$

Auf die so ausgewählten $k_0 + l_0 + 2$ Glieder lasse man wieder so viele aus (2) $b_{k_0+1} \ldots b_{k_1}$ folgen, dafs die Summe aller Glieder gerade K übersteigt, und hierauf so viele aus (3): $- c_{l_0+1}, \ldots - c_{l_1}$, dafs die Summe aller gerade unter K sinkt. U. s. f. Im Allgemeinen werden somit für die neue Reihe die Glieder gewählt:

$$b_{k_{r-1}+1} + b_{k_{r-1}+2} + \ldots + b_{k_r}$$
$$- c_{l_{r-1}+1} - c_{l_{r-1}+2} - \ldots - c_{l_r} \quad (r \geqq 1).$$

Schematisch sei sie bezeichnet mit

$$a'_0 + a'_1 + \ldots + a'_n + \ldots \tag{8}$$

und ihre Partialsummen mit s'_n. Ist

$$m_r = k_r + l_{r-1} + 1, \quad n_r = k_r + l_r + 1,$$

so hat man, da s'_{m_r} mit b_{k_r}, s'_{n_r} mit $-c_{l_r}$ schliefst,

$$K + b_{k_r} \geqq s'_{m_r+h} \geqq K \quad (h = 0, 1 \ldots l_r - l_{r-1} - 1)$$
$$K - c_{l_r} \leqq s'_{n_r+i} \leqq K \quad (i = 0, 1 \ldots k_{r+1} - k_r - 1).$$

Vermöge (7) existirt eine ganze positive Zahl p, so dafs für $n \geqq p$ sowohl $b_n < \varepsilon$, als auch $c_n < \varepsilon$. Geht man in der Reihe (8) so weit, dafs k_r und l_r nicht kleiner als p sind — es möge dann $m_r = M$ sein — so findet man zufolge der vorstehenden Ungleichungen, wenn nur $n > M$ ist,

$$|s'_n - K| < \varepsilon$$

d. i.

$$\lim s'_n = K \quad \text{bei} \quad \lim n = +\infty.$$

Falls $K < 0$, hat man ähnlich vorzugehen.

Man bemerke noch, dafs unsere Schlüsse lediglich darauf beruhen, dafs die Reihen (2) und (3) divergiren und

$$\lim a_n = 0 \quad \text{bei} \quad \lim n = +\infty.$$

Vermöge des vorstehenden Satzes haben wir die convergenten Reihen in zwei Classen zu scheiden:[9]) die absolut (oder unbedingt) convergenten (wozu natürlich alle convergenten Reihen zu zählen sind, die nur Glieder mit einem Zeichen in unbegrenzter Anzahl enthalten) und die schlechthin (oder bedingt) convergenten, wofür die Reihe (5) divergirt, so dafs ihr Grenzwerth von der Anordnung der Glieder abhängt. Zu den letzteren gehören in der That die Reihen (a), (c) in Nr. 8.

Die absolut convergenten Reihen können als Summen ihrer Glieder betrachtet werden (was wir sogleich begründen werden), die übrigen nur in uneigentlichem Sinne, mit Verzicht auf einige wesentliche Eigenschaften der endlichen Summen.

10. Sätze über absolut convergente Reihen. Sie entsprechen den Sätzen über die Reihen mit positiven Gliedern in Nr. 4—7, aus welchen sie sich unmittelbar ableiten lassen.

1) „Wenn die unendliche Reihe

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots \tag{8}$$

absolut convergirt und darin Glieder von entgegengesetzten Zeichen vorkommen, so hat man

$$|\Sigma a_n| < \Sigma |a_n|“.$$

Nach dem 2. Satze in Nr. 3, da

$$-|a_n| \leqq a_n \leqq |a_n|.$$

2. „Convergirt neben (8) auch die Reihe $b_0 + b_1 + \ldots$ absolut, so convergiren auch die Reihen

$$(a_0 \pm b_0) + (a_1 \pm b_1) + \ldots$$

absolut.“

3) „Convergirt (8) absolut und bedeuten $c_0, c_1, \ldots c_n \ldots$ Zahlen, die dem absoluten Betrage nach unter einer Zahl C liegen, so convergirt auch die Reihe $a_0 c_0 + a_1 c_1 + \ldots$ absolut.“ — Denn nach dem 3. Satze in Nr. 4 convergirt die Reihe

$$|a_0 c_0| + |a_1 c_1| + \ldots + |a_n c_n| + \ldots,$$

da

$$|c_n| < C.$$

Corollar. „Wenn die Reihe (8) convergirt, bezw. die Partialsummen

$$c_{n+1} = a_0 + a_1 + \ldots + a_n \quad (n = 0, 1, \ldots)$$

zwischen endlichen Grenzen liegen und die Zahlen

$$b_0, b_1 \ldots b_n \ldots$$

bei wachsendem n dem endlichen Grenzwerthe b bezw. Null in einem Sinne sich nähern, so convergirt die unendliche Reihe

$$a_0 b_0 + a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n + \ldots \text{“}$$ [10])

Die Reihe

$$\sum_1^\infty {}^n (b_n - b_{n-1})$$

convergirt nach Nr. 1 und zwar absolut, indem ihre Glieder entweder 0 oder gleichbezeichnet sind. Somit convergirt (absolut) die Reihe

$$\sum_1^\infty {}^n (b_n - b_{n-1}) c_n,$$

daher nach Nr. 3, 4) die Reihe

$$\sum_0^\infty {}^n b_n (c_n - c_{n+1})$$

d. i. wenn man $c_0 = 0$ setzt, die Reihe

$$\sum_0^\infty {}^n (- a_n b_n).$$

4) „Hebt man aus einer absolut convergenten Reihe eine unendliche Folge von Gliedern auf beliebige Weise heraus, so bilden auch sie eine absolut convergente Reihe.“ — Nach dem 1. Satze in Nr. 5, anzuwenden auf Reihe (5).

5) „Vertheilt man die Glieder von (8) in eine endliche Anzahl von Reihen, so convergiren die unendlichen unter ihnen absolut und die Summe aller Summen ist gleich dem Grenzwerthe von (8).“ — Beweis wie zum 4. Satze in Nr. 5.

6) „Es sei die Reihe

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots \tag{8}$$

absolut convergent und a ihr Grenzwerth. Vertheilt man ihre Glieder, ohne eines zu übergehen, in unendlich viele Reihen

$$\begin{array}{l} a_0^{(0)} + a_1^{(0)} + \ldots + a_n^{(0)} + \ldots \\ a_0^{(1)} + a_1^{(1)} + \ldots + a_n^{(1)} + \ldots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_0^{(m)} + a_1^{(m)} + \ldots + a_n^{(m)} + \ldots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot, \end{array} \tag{9}$$

so convergirt jede derselben absolut und die aus ihren Grenzwerthen $a^{(0)}, a^{(1)} \dots a^{(m)} \dots$ gebildete Reihe convergirt ebenfalls absolut und zwar zum Grenzwerthe a."[11])

7) „Convergiren die beiden unendlichen Reihen

$$\begin{aligned} &a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_m + \dots, \\ &b_0 + b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots \end{aligned} \tag{10}$$

absolut und zwar bez. zu den Grenzwerthen a, b; so convergirt jede aus den Gliedern $a_m b_n$ gebildete einfach unendliche Reihe, wie

$$\begin{gathered} a_0 b_0 + a_0 b_1 + a_1 b_0 + \dots \\ + a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_r b_{n-r} + \dots + a_n b_0 + \dots \end{gathered}$$

absolut und zwar zum Grenzwerthe ab."[12])

Die Sätze 6) und 7) können durch Zurückführung auf den 1. und 2. Satz in Nr. 7 gezeigt werden, indem man die Glieder der Reihen (9) und (10) in die Gruppen der positiven und negativen zerlegt. Bezeichnen wir die Summe der positiven Glieder der $(m+1)^{\text{ten}}$ Zeile in (9) mit $b^{(m)}$, die der negativen mit $-c^{(m)}$, so ist

$$a^{(m)} = b^{(m)} - c^{(m)}.$$

Es ist aber $b^{(0)} + b^{(1)} + \dots$ gleich der Summe aller positiven Glieder in (8) $-c^{(0)} - c^{(1)} - \dots$ der aller negativen Glieder derselben Reihe. Bezeichnet man diese Summen wieder mit $b, -c$, so ist

$$a^{(0)} + a^{(1)} + \dots = b - c = a.$$

Aehnlich läfst sich auch der 7. Satz beweisen.

Die in Rede stehenden Sätze können aber auch vermittelst eines Satzes abgeleitet werden, welcher als Verallgemeinerung des Satzes in Nr. 6 anzusehen ist. Wir führen ihn an, da er auch an sich von Wichtigkeit ist.

11. Hilfssatz.

1) „Es seien gegeben unendliche viele endliche oder unendliche Reihen (9), enthaltend beliebige reelle Zahlen. Dabei sollen sie die folgende Eigenschaft haben. Ersetzt man jedes Glied $a_n^{(m)}$ durch seinen absoluten Betrag $A_n^{(m)}$, d. h. bildet man das Schema

$$\begin{array}{l} A_0^{(0)} + A_1^{(0)} + \ldots + A_n^{(0)} + \ldots \\ A_0^{(1)} + A_1^{(1)} + \ldots + A_n^{(1)} + \ldots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ A_0^{(m)} + A_1^{(m)} + \ldots + A_n^{(m)} + \ldots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\,, \end{array} \tag{11}$$

so convergiren sämmtliche Horizontalreihen und zwar bezüglich zu den Grenzwerthen $A^{(0)}, A^{(1)}, \ldots A^{(m)}, \ldots$ und die aus diesen Zahlen gebildete Reihe $A^{(0)} + A^{(1)} + \ldots$ convergirt ebenfalls."

„Unter dieser Voraussetzung convergiren absolut sämmtliche Horizontalreihen des Schema (9) und die aus ihren Grenzwerthen $a^{(0)}, a^{(1)}, \ldots a^{(m)} \ldots$ gebildete Reihe. Die Summe der letzteren Reihe sei a."

„Es convergirt absolut die unendliche Reihe

$$\begin{array}{l} a_0^{(0)} + a_0^{(1)} + a_1^{(0)} + \ldots \\ + a_0^{(n)} + a_1^{(n-1)} + \ldots a_{n-1}^{(1)} + a_n^{(0)} + \ldots \end{array} \tag{12}$$

und zwar zum Grenzwerthe a."

2) „Und umgekehrt, convergirt die Reihe (12) absolut und zwar zu einem Grenzwerthe a, so convergiren absolut sämmtliche Horizontalreihen in (9) und die aus ihren Grenzwerthen gebildete Reihe, letztere zum Grenzwerthe a."

Beweis. Zu 1). Die absolute Convergenz von

$$a_0^{(m)} + a_1^{(m)} + \ldots + a_n^{(m)} + \ldots \quad (m = 0, 1, 2 \ldots) \tag{13}$$

folgt unmittelbar. Dabei ist

$$|a^{(m)}| \leqq A^{(m)},$$

so dafs die Reihe

$$|a^{(0)}| + |a^{(1)}| + \ldots + |a^{(m)}| + \ldots$$

convergirt, d. h. die Reihe

$$a^{(0)} + a^{(1)} + \ldots + a^{(m)} + \ldots$$

ist absolut convergent. Nach Nr. 6 convergirt die Reihe

$$A_0^{(0)} + A_0^{(1)} + A_1^{(0)} + \ldots + A_0^{(n)} + A_1^{(n-1)} + \ldots + A_n^{(0)} + \ldots; \tag{14}$$

somit convergirt (12) absolut. Nun sei wie in Nr. 6:

$$a^{(0)} + a^{(1)} + \ldots + a^{(n)} = s^{(n)} = v_n + r_n, \qquad (15)$$

worin

$$r_n = \sum_1^\infty {}^p (a_p^{(n)} + a_{p+1}^{(n-1)} + \ldots + a_{p+n}^{(0)}).$$

Setzt man

$$A_0^{(n)} + A_1^{(n-1)} + \ldots + A_n^{(0)} = D_n,$$

so convergirt neben (14) die Reihe $D_0 + D_1 + D_2 + \ldots$ Da

$$|r_n| < D_{n+1} + D_{n+2} + \ldots \qquad (16)$$

ist, so folgt

$$\lim_{n=+\infty} r_n = 0,$$

d. h. nach (15)

$$a = \lim_{n=+\infty} v_n.$$

Zu 2). Aus der Convergenz von (14) folgt nach Nr. 6, dafs in (11) sämmtliche Horizontalreihen und die aus ihren Grenzwerthen gebildete Reihe convergirt. Somit convergirt (13) absolut. Nach (16) schliefst man wieder $\lim r_n = 0$ bei $\lim n = +\infty$, so dafs aus (15) sich ergiebt

$$\lim_{n=+\infty} s^{(n)} = \lim_{n=+\infty} v_n = a.$$

Aus dem soeben bewiesenen Satze ergeben sich zunächst der 6. und 7. Satz von Nr. 10 und zwar auf dieselbe Weise, wie die ihnen entsprechenden Sätze in Nr. 7 aus dem Satze in Nr. 6.

Wir schliessen ferner unmittelbar aus dem 2. Theile desselben den folgenden Satz von Cauchy:[13])

3) Vorausgesetzt, dafs alle Horizontalreihen des Schema (9) convergiren und dafs ihre Summen $a^{(0)}$, $a^{(1)} \ldots a^{(m)} \ldots$ auch eine convergente Reihe bilden, und dafs diese beiden Eigenschaften bestehen bleiben, wenn man jedes Glied in (9) durch seinen absoluten Betrag ersetzt; so kann man schliefsen

1) dafs alle Verticalreihen in (9) absolut convergiren,

2) dafs ihre Summen

$$a_n = a_n^{(0)} + a_n^{(1)} + \dots \qquad (n = 0, 1, 2 \dots)$$

eine absolut convergente Reihe bilden;

3) dafs die Summe der Reihe $a_0 + a_1 + \dots$ gleich ist der von $a^{(0)} + a^{(1)} + \dots$

Wenn das Schema (9) der soeben erwähnten Bedingung genügt, so hat es dieselbe Eigenschaft, wie ein endliches Schema von $(m + 1)$ Zeilen zu je $(n + 1)$ Gliedern: Es ist die Summe der Summen der Horizontalreihen gleich der Summe der Summen der Verticalreihen. Es kann somit ein solches Schema nicht von obiger Beschaffenheit sein, wenn die genannten Summen von einander abweichen. Dies tritt ein bei folgendem Beispiel.[14]) Es sei

$$a_n^{(m)} = \frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^m - \frac{1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^m, \quad \left.\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right\} = 1, 2 \dots$$

Die m^{te} Horizontalreihe hat die Summe 0 (vgl. Nr. 1); somit ist die Summe aller Horizontalreihen $= 0$. Die n^{te} Verticalreihe liefert die Summe

$$\frac{1}{n}\sum_1^\infty{}_m \left(\frac{n-1}{n}\right)^m - \frac{1}{n+1}\sum_1^\infty{}_m \left(\frac{n}{n+1}\right)^m = \frac{n-1}{n} - \frac{n}{n+1},$$

so dafs die Summe aller Verticalreihen nach Nr. 1 ist

$$0 - \lim_{n=+\infty} \frac{n}{n+1} = -1.$$

Man wird bemerken, dafs von einem bestimmten an alle Glieder einer jeden Horizontalreihe positiv, einer jeden Verticalreihe negativ sind; so dafs sowohl die eine, als auch die andere absolut convergirt.

Indefs ist die im dritten Satze ausgesprochene Bedingung nicht nothwendig dazu, dafs die in Rede stehenden Grenzwerthe

$$\sum_0^\infty{}_m \sum_0^\infty{}_n a_n^{(m)} \qquad \sum_0^\infty{}_n \sum_0^\infty{}_m a_n^{(m)} \tag{17}$$

einander gleich seien. Das trifft, wie Cauchy selbst bemerkt hat,[15]) auch dann zu, wenn die Doppelreihe

$$
\begin{aligned}
&a_0^{(0)} + a_1^{(0)} + \dots + a_n^{(0)} + \dots \\
&+ a_0^{(1)} + a_1^{(1)} + \dots + a_n^{(1)} + \dots \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&+ a_0^{(m)} + a_1^{(m)} + \dots + a_n^{(m)} + \dots \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
\tag{18}
$$

convergirt, d. h. wenn die Summe

$$
s_n^{(m)} = \left\{
\begin{aligned}
&a_0^{(0)} + a_1^{(0)} + \dots + a_n^{(0)} \\
&+ a_0^{(1)} + a_1^{(1)} + \dots + a_n^{(1)} \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&+ a_0^{(m)} + a_1^{(m)} + \dots + a_n^{(m)}
\end{aligned}
\right.
$$

bei den simultanen und von einander unabhängigen Grenzübergängen $\lim m = +\infty$, $\lim n = +\infty$ einen endlichen Grenzwerth a besitzt. Nach IX. 20 hat man darunter zu verstehen, dafs zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ Zahlen $\mu > 0$, $\nu > 0$ gehören, so dafs für alle ganzzahligen Werthsysteme

$$
m > \mu \qquad n > \nu \qquad |s_n^{(m)} - a| < \varepsilon.
$$

Es stimmt dann jeder der Werthe (17) mit a überein, wie sich leicht nachweisen läfst. Man kann ferner, wie auch unschwer sich ergiebt, die im dritten Satze geforderte Eigenschaft des Schema (9) als absolute Convergenz der Doppelreihe (18) bezeichnen.

Doppelreihen, die nicht absolut convergiren, kann man u. A. auf folgende Art erhalten. Es sei von den convergenten Reihen

$$
a = a_0 + a_1 + a_2 + \dots, \quad b = b_0 + b_1 + b_2 + \dots \tag{19}
$$

wenigstens eine nicht absolut convergent. Setzt man in (18)

$$
a_n^{(m)} = a_m b_n,
$$

so ist

$$
s_n^{(m)} = (a_0 + a_1 + \dots + a_m)(b_1 + b_2 + \dots + b_n),
$$

somit

$$
\lim_{m=+\infty}\ \lim_{n=+\infty} s_n^{(m)} = ab.
$$

Dafs die so gebildete Doppelreihe (18) nicht absolut convergirt, erhellt unmittelbar, sowie auch, dafs trotzdem jeder der Grenzwerthe (17) den Werth ab hat.

Anmerkung. Weifs man, dafs neben der Doppelreihe (18) auch die unendliche Reihe $d_0 + d_1 + d_2 + \ldots$, worin

$$d_n = a_0^{(n)} + a_1^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}^{(1)} + a_n^{(0)},$$

convergirt, so kann man schliefsen, dafs der Grenzwerth derselben gleich ist dem der Doppelreihe (18).[16] Daraus folgt der Satz, der in Nr. 23 auf andere Art gezeigt werden soll: „Sind die unendlichen Reihen (19) convergent und convergirt auch die Reihe $d_0 + d_1 + d_2 + \ldots$, worin

$$d_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0, \qquad (20)$$

so ist der Grenzwerth der letzteren gleich ab d. i. dem Producte der Grenzwerthe der Reihen (19).[17])

Die Reihe (20) convergirt stets, wenn mindestens eine der Reihen (19) absolut convergirt.[18]) Wenn keine von beiden absolut convergirt, so kann die Reihe (20) auch divergiren. Man setze z. B.

$$a_n = b_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[m]{n}} \qquad (n = 1, 2 \ldots);$$

dann ist

$$d_n = a_1 b_{n-1} + \ldots + a_{n-1} b_1$$

$$= (-1)^n \left\{ \frac{1}{\sqrt[m]{1 \cdot (n-1)}} + \frac{1}{\sqrt[m]{2 \cdot (n-2)}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[m]{(n-1) \cdot 1}} \right\}. \qquad (21)$$

Aus

$$r(n-r) = \frac{n^2}{4} - \left(\frac{n}{2} - r\right)^2$$

folgt, dafs

$$r(n-r) \leqq \frac{n^2}{4}.$$

Mithin ist

$$(-1)^n d_n > \frac{n-1}{\sqrt[m]{\frac{1}{4} n^2}} = \sqrt[m]{4} \cdot \left(n^{1-\frac{2}{m}} - n^{-\frac{2}{m}}\right),$$

also, wenn $m > 2$,

$$\lim (-1)^n d_n = +\infty \quad \text{bei} \quad n = +\infty.$$

Wenn $m = 2$, so ist

$$(-1)^n d_n > 2 - \varepsilon \quad \text{für alle} \quad n > 2 : \varepsilon.$$

In keinem Falle kann somit die Reihe (21) convergiren. (Nach der Integralrechnung ist für $m = 2$ $\lim (-1)^n d_n = \pi$.)

12. Ueber die Grenzwerthe einiger unendlichen Producte.

Satz. 1) „Es sei $0 < a_n < 1$ und

$$p_n = (1 - a_0)(1 - a_1) \dots (1 - a_n) = \prod_0^n {}_r (1 - a_r).$$

Beim Grenzübergange $\lim n = +\infty$ hat p_n stets einen endlichen Grenzwerth und zwar ist er positiv, wenn die unendliche Reihe

$$a_0 + a_1 + \dots + a_n + \dots \tag{a}$$

convergirt; dagegen Null, wenn sie divergirt."

2) „Es sei $a_n > 0$ und

$$q_n = (1 + a_0)(1 + a_1) \dots (1 + a_n) = \prod_0^n {}_r (1 + a_r).$$

Beim Grenzübergange $\lim n = +\infty$ hat q_n stets einen Grenzwerth und zwar ist er eine positive Zahl > 1, wenn die unendliche Reihe (a) convergirt; dagegen $+\infty$, wenn sie divergirt."

Der Beweis dieses Satzes beruht auf folgendem

Hilfssatz. „Sind die Zahlen α_n gleichbezeichnet und $1 + \alpha_n > 0$, so ist

$$(1 + \alpha_0)(1 + \alpha_1) \dots (1 + \alpha_m) > 1 + (\alpha_0 + \alpha_1 + \dots \alpha_m)\text{“}. \tag{b}$$

Man findet unmittelbar, dafs, wenn nur α_0 und α_1 gleichbezeichnet sind,

$$(1 + \alpha_0)(1 + \alpha_1) > 1 + \alpha_0 + \alpha_1;$$

ferners, da $1 + \alpha_2 > 0$,

$$\begin{aligned}(1 + \alpha_0)(1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) &> (1 + \alpha_0 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \\ &> 1 + \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2.\end{aligned}$$

U. s. f. für jede beliebige Anzahl von positiven Factoren. — Für

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_m = d$$

folgt aus diesem Satze der erste Theil des 4. Satzes in VIII. 2.

Betrachten wir nun die Zahlen $p_0, p_1, \ldots p_n$, so haben dieselben, da

$$0 < p_{n+1} < p_n, \quad \text{bei} \quad \lim n = +\infty$$

einen endlichen Grenzwerth $p \geqq 0$ (IX. 6). Convergirt die Reihe (a), so gehört zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl m, so dafs

$$a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_{m+r} < \varepsilon, \tag{c}$$

was für einen der Werthe 1, 2 ... auch r erhalten mag. Nun ist nach (b)

$$p_{m+r} > p_m(1 - a_{m+1} - a_{m+2} - \ldots - a_{m+r}) > p_m(1-\varepsilon);$$

somit

$$p \geqq p_m(1-\varepsilon),$$

also p sicher positiv. — Divergirt die unendliche Reihe (a), so gehört zu jeder Zahl $G > 0$ eine Zahl $\mu > 0$, so dafs

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n > G, \quad \text{wenn nur } n > \mu. \tag{d}$$

Nun ist

$$1 - a_n < \frac{1}{1 + a_n},$$

somit

$$p_n < \frac{1}{q_n} < \frac{1}{1 + a_0 + a_1 + \ldots + a_n} < \frac{1}{1+G},$$

wenn nur $n > \mu$. D. h. es ist $p = 0$.

Da $q_{n+1} > q_n > 1$, so haben die q_n bei $\lim n = +\infty$ einen positiven Grenzwerth $q > 1$. Wenn die unendliche Reihe (a) convergirt, so bemerke man nach (c), dafs für $n > m$

$$1 + a_n < \frac{1}{1 - a_n},$$

somit

$$q_{m+r} < \frac{q_m}{(1-a_{m+1})\ldots(1-a_{m+r})} < \frac{q_m}{1-\varepsilon}.$$

In diesem Falle ist demnach q endlich. — Wenn (a) divergirt, so folgt aus (b) und (d), dafs

$$q_n > 1 + a_0 + a_1 + \ldots + a_n > 1 + G \qquad (n > \mu)$$

ist, somit dafs $\lim q_n = +\infty$ ist.

Criterien der Convergenz und Divergenz von Reihen mit positiven Gliedern.

13. P. du Bois-Reymond hat ein sehr elegantes Verfahren gelehrt, nach welchem die in der Anwendung bequemsten Criterien der Convergenz und Divergenz von Reihen mit positiven Gliedern aus einer gemeinsamen Quelle hergeleitet werden können.[19]) Indem wir zur Auseinandersetzung derselben übergehen, bemerken wir, dafs in den Nr. 13—20 $\lim f(n)$ stets den Grenzwerth der Function $f(n)$ für $\lim n = +\infty$ bedeutet, wobei n alle natürlichen Zahlen durchläuft.

Nach Nr. 1 convergirt die unendliche Reihe

$$\sum_0^\infty{}^n \{\psi(n) - \psi(n+1)\}$$

stets, wenn $\lim \psi(n)$ existirt und endlich ist; sie divergirt nach Nr. 2, wenn dieser Grenzwerth unendlich ist. Lassen wir $\psi(n)$ eine monotone (einsinnige) Function von n sein d. h. eine solche Function, die bei wachsendem n entweder beständig zunimmt oder beständig abnimmt, so sind die Glieder der soeben erwähnten Reihe sämmtlich gleichbezeichnet. Dann können wir nach Nr. 4 behaupten, dafs die Reihe

$$\sum_0^\infty{}^n \gamma_n(\psi(n) - \psi(n+1)),$$

worin die Zahlen γ_n ebenfalls gleichbezeichnet sein sollen, convergirt, wenn $\lim \psi(n)$ endlich und die $|\gamma_n|$ sämmtlich unter einer Zahl $C > 0$ liegen; dafs sie divergirt, wenn $\lim \psi(n)$ unendlich und die $|\gamma_n|$ über einer positiven Zahl C' liegen.

Aus diesem Satze werden wir zwei Classen von Criterien erhalten, deren eine auf das allgemeine Glied der Reihe, die andere auf den Quotienten je zweier aufeinander folgenden Glieder derselben gegründet ist. Die einfachsten Regeln der einen, wie der anderen Classe haben wir schon in Nr. 4 kennen gelernt. — Im Folgenden bedeute also $a_0 + a_1 + \ldots$ oder kurz Σa_n eine beliebige Reihe mit positiven Gliedern, und a_{n+k}, worin k irgend eine feste ganze Zahl mit Einschlufs von 0 sein soll, ihr allgemeines Glied.

14. Criterien erster Art. Man setze

$$a_{n+k} = \gamma_n\,(\psi(n) - \psi(n+1)).$$

Wenn man $\psi(n)$ irgend eine monotone Function von n mit endlichem $\lim \psi(n)$ sein läfst, so mufs die Reihe Σa_n convergiren, falls

$$\gamma_n = \frac{a_{n+k}}{\psi(n) - \psi(n+1)} \tag{1}$$

dem absoluten Betrage nach unter einer endlichen Zahl C liegt, insbesondere falls $\lim \gamma_n$ nicht unendlich. Und ist $\psi(n)$ irgend eine monotone Function von n mit unendlichem $\lim \psi(n)$, so mufs Σa_n divergiren, falls $|\gamma_n|$ über einer positiven Zahl C' liegt, insbesondere falls $\lim \gamma_n$ nicht Null ist.

Das sind die Criterien erster Art. Handelt es sich um die Bildung bestimmter Regeln, so wird man für $\psi(n)$ jede Function von den oben angegebenen Eigenschaften setzen können; dann aber alle diejenigen Functionen ausschliefsen, wofür der Grenzwerth des neuen γ_n zugleich mit dem bereits aufgestellten $\lim \gamma_n$ entweder stets nicht unendlich oder stets nicht Null ist. Wir können demnach $\psi(n)$ zunächst so beschränken, dafs es schliefslich nur positive Werthe annimmt, und dafs $\lim \psi(n)$ entweder Null oder $+\infty$ ist. Denn wäre $\lim \psi(n) = c > 0$, so kann das Convergenzcriterium zurückgeführt werden auf das zu einer der Functionen $\psi(n) - c$, $c - \psi(n)$ gehörige. Nunmehr können wir diese Criterien so aussprechen:

„Nimmt die Function $\psi(n)$ bei wachsendem n beständig ab und ist $\lim \psi(n) = 0$, so convergirt Σa_n, wenn

$$\lim \frac{a_{n+k}}{\psi(n) - \psi(n+1)} \geqq 0,$$

jedoch nicht $+\infty$.“

„Nimmt die Function $\psi(n)$ bei wachsendem n beständig zu und ist $\lim \psi(n) = +\infty$, so divergirt Σa_n, wenn

$$\lim \frac{a_{n+k}}{\psi(n+1) - \psi(n)}$$

positiv, d. h. nicht Null ist."

15. Geordnete Folgen von Criterien erster Art.

a) Für Convergenz. Es seien $\psi(n)$, $\psi'(n)$ zwei Functionen, die mit wachsendem n beständig abnehmen und bei $\lim n = +\infty$ zum Grenzwerthe 0 convergiren. Wir bilden neben (1)

$$\gamma_n' = \frac{a_{n+k}}{\psi'(n) - \psi'(n+1)} = \frac{\psi(n) - \psi(n+1)}{\psi'(n) - \psi'(n+1)} \gamma_n,$$

woraus wir schliefsen, dafs, falls $\lim \gamma_n$ nicht $+\infty$, auch $\lim \gamma_n'$ nicht $+\infty$ ist, wenn $\lim \frac{\psi(n) - \psi(n+1)}{\psi'(n) - \psi'(n+1)}$ nicht $+\infty$ ist. Nach IX. 11 mufs unter der zuletzt erwähnten Voraussetzung auch $\lim [\psi(n) : \psi'(n)]$ endlich sein. Auf diese Bemerkung gestützt, gelangen wir zu den folgenden Ergebnissen, wenn wir die in (1) einzusetzenden Functionen noch der weiteren Beschränkung unterwerfen, dafs

$$\frac{\psi(n) - \psi(n+1)}{\psi'(n) - \psi'(n+1)} \quad \text{bei} \quad \lim n = +\infty$$

einen Grenzwerth haben soll.

1) Wir können neben $\psi(n)$ ausschliefsen diejenigen Functionen $\psi'(n)$, wofür $\lim [\psi(n) : \psi'(n)]$ weder 0 noch $+\infty$ ist.

2) Wenn wir eine unbegrenzte Folge von Criterien bilden wollen dadurch, dafs wir in (1) nacheinander für $\psi(n)$ setzen

$$\ldots \psi_{-1}(n), \quad \psi_0(n), \quad \psi_1(n), \quad \ldots \psi_r(n) \ldots, \tag{2}$$

und sie die Eigenschaft haben soll, dafs wenn eines der darin vorkommenden Criterien Convergenz von Σa_n anzeigt, auch alle darauf folgenden dasselbe leisten sollen, wenn aber eines versagt, vielleicht ein späteres Glied der Folge entscheidet; so wird es genügen, die Functionen (2) so zu wählen, dafs

$$\lim \{\psi_r(n) : \psi_s(n)\} \quad (r < s)$$

Null ist. Nur so nämlich ist es vielleicht möglich, dafs für eine vorgelegte convergente Reihe Σa_n neben

$$\lim \gamma_n^{(r)} = +\infty, \qquad \gamma_n^{(r)} = \frac{a_{n+k}}{\psi_r(n) - \psi_r(n+1)}$$

$\lim \gamma_n^{(s)}$ endlich ausfällt, so dafs während das erstere Criterium zur Entscheidung nicht führt, sie durch ein ihm folgendes gebracht wird.

Den nacheinander gestellten Forderungen genügen die Functionen

$$\ldots e^{-\mu n},\ n^{-\mu_0},\ (\log n)^{-\mu_1},\ (\log_2 n)^{-\mu_2} \ldots (\log_r n)^{-\mu_r} \ldots, \tag{3}$$

worin

$$\log_2(n) = \log(\log n), \ldots$$

$\log_r(n)$ den $r$mal hintereinander genommenen Logarithmus bedeutet und die Exponenten μ sämmtlich positive Zahlen sind. Alle Functionen (3) sind, wenn n gehörig grofs gedacht wird, positiv, monoton und haben bei $\lim n = +\infty$ den Grenzwerth 0.[20]) Ferner existiren, wie sich sogleich ergeben wird, die Grenzwerthe

$$\lim \frac{\psi_r(n) - \psi_r(n+1)}{\psi_s(n) - \psi_s(n+1)} \qquad (r < s) \tag{4}$$

und sind gleich Null, da

$$\lim [\psi_r(n) : \psi_s(n)] = 0.$$

Die letzte Formel folgt leicht aus der Gleichung (i) in IX. 11, welche wir auch so schreiben können

$$\lim_{x=+\infty} \frac{x^\mu}{B^{\lambda x}} = 0,$$

wobei B die Basis des Logarithmensystemes, λ μ positive Zahlen bedeuten. Durch die Substitution $x = \log y$ findet man hieraus

$$\lim_{y=+\infty} \frac{(\log y)^\mu}{y^\lambda} = 0$$

und weiter durch $y = \log_r z$ $(r \geqq 1)$

$$\lim_{z=+\infty} \frac{(\log_{r+1} z)^\mu}{(\log_r z)^\lambda} = 0.$$

Endlich bemerke man, dafs $(r < s)$

$$\frac{(\log_s n)^\mu}{(\log_r n)^\lambda} = \frac{(\log_s n)^\mu}{\log_{s-1} n} \cdot \frac{\log_{s-1} n}{\log_{s-2} n} \cdots \frac{\log_{r+2} n}{\log_{r+1} n} \cdot \frac{\log_{r+1} n}{(\log_r n)^\lambda}.$$

Aus der soeben aufgestellten Definition einer geordneten Folge von Convergenzcriterien ergiebt sich unmittelbar, dafs man sie bei einem beliebigen Gliede beginnen kann. Es giebt jedoch convergente Reihen Σa_n, für welche sämmtliche mittelst der Functionen (3) gebildeten Criterien den Grenzwerth $+\infty$ liefern.[21])

b) Für Divergenz. Die bezüglichen Erwägungen verlaufen völlig parallel. Wir setzen in (1) eine Folge (2) von Functionen, deren jede mit wachsendem n beständig wächst und den Grenzwerth $+\infty$ hat, und wählen dieselben so, dafs die Grenzwerthe (4) existiren und $+\infty$ sind, so dafs auch

$$\lim\,[\psi_r(n) : \psi_s(n)] = +\infty \qquad (r < s).$$

Eine solche Reihe bilden die Functionen

$$\ldots e^{\mu n}, \quad n^{\mu_0}, \quad (\log n)^{\mu_1}, \quad (\log_2 n)^{\mu_2} \ldots (\log_r n)^{\mu_r}, \ldots \tag{5}$$

wovon die μ wieder sämmtlich positiv sein sollen.

16. Bei wirklicher Bildung der Ausdrücke (1) mit den Functionen (4) und (5) zeigt sich, dafs sich aus denselben noch Factoren absondern lassen, deren Grenzwerth weder 0 noch $+\infty$ ist, die somit stets weggelassen werden können; denn hat die vereinfachte Function einen Grenzwerth, der nicht $+\infty$ (0), so auch die ursprüngliche, und umgekehrt. Wir können die Rechnung für beide Functionsreihen zusammenfassen. Es sei also α eine beliebige von 0 verschiedene Zahl. Dann ist

$$e^{\alpha(n+1)} - e^{\alpha n} = e^{\alpha n}(e^{\alpha} - 1),$$

wo $e^{\alpha} - 1$ nicht 0 ist. In den folgenden Entwickelungen mögen $u(n)$, $v(n)$, $w(n)$ und gleichlautende Buchstaben Functionen bedeuten, die bei $\lim n = +\infty$ den Grenzwerth 1 haben. Nun ist nach IX. 10 (c)

$$(1 + x)^{\alpha} - 1 = \alpha x\, u(x) \tag{6}$$

wo

$$\lim_{x=0} u(x) = 1;$$

also

$$
\begin{aligned}
(n+1)^\alpha - n^\alpha &= n^\alpha \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha - 1\right\} \\
&= \alpha n^{\alpha-1} u\left(\frac{1}{n}\right) = \alpha n^{\alpha-1} w(n).
\end{aligned} \tag{7}
$$

Ferner hat man nach IX. 12 (r)

$$\log(1+x) = Mx\, v(x), \tag{8}$$

wo

$$\lim_{x=0} v(x) = 1$$

und M den Modulus des Logarithmensystemes bezeichnet. Somit ergiebt sich

$$
\begin{aligned}
\frac{\log(n+1)}{\log n} = 1 + \frac{1}{\log n}\log\left(1+\frac{1}{n}\right) &= 1 + \frac{M}{n\log n}\, v\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= 1 + \frac{M v_1(n)}{n\log n}
\end{aligned}
$$

und

$$\{\log(n+1)\}^\alpha - \log n^\alpha = (\log n)^\alpha \left[\left(\frac{\log(n+1)}{\log n}\right)^\alpha - 1\right]$$

$$= (\log n)^\alpha \cdot \frac{\alpha M v_1(n)}{n\log n}\, u\left(\frac{M v_1(n)}{n\log n}\right) = \frac{\alpha M}{n}(\log n)^{\alpha-1} w_1(n). \tag{9}$$

Ueberhaupt ist

$$
\begin{aligned}
\frac{\log_r(n+1)}{\log_r n} &= 1 + \frac{M^r v_r(n)}{L_r(n)}, \\
L_r(n) &= n \log n \log_2(n) \ldots \log_r(n).
\end{aligned} \tag{10}
$$

Denn sieht man diese Formel als richtig an, wie sie in der That für $r=1$ gilt, wobei man nur $L_0(n) = n$ zu setzen hat, so folgt

$$
\begin{aligned}
\log_{r+1}(n+1) - \log_{r+1} n &= \log\left\{\frac{\log_r(n+1)}{\log_r n}\right\} \\
&= \log\left\{1 + \frac{M^r v_r(n)}{L_r(n)}\right\},
\end{aligned}
$$

und weiter nach (8)

$$
\begin{aligned}
\log_{r+1}(n+1) - \log_{r+1} n &= \frac{M^{r+1} v_r(n)}{L_r(n)}\, v\left\{\frac{M^r v_r(n)}{L_r(n)}\right\} \\
&= \frac{M^{r+1}}{L_r(n)}\, v_{r+1}(n),
\end{aligned}
$$

somit

$$\frac{\log_{r+1}(n+1)}{\log_{r+1} n} = 1 + \frac{M^{r+1} v_{r+1}(n)}{L_{r+1}(n)}.$$

Es gilt also die Formel (10) auch für $r = 2$, somit für $r = 3$ u. s. f.

Endlich hat man nach (6) und (10)

$$\{\log_r (n+1)\}^\alpha - \{\log_r n\}^\alpha = (\log_r n)^\alpha \left\{ \left[\frac{\log_r (n+1)}{\log_r n}\right]^\alpha - 1 \right\}$$

$$= (\log_r n)^\alpha \frac{\alpha M^r v_r(n)}{L_r(n)} u \left\{ \frac{M^r v_r(n)}{L_r(n)} \right\},$$

somit

$$\log_r (n+1)^\alpha - \log_r n^\alpha = \frac{\alpha M^r}{L_{r-1}(n)} (\log_r n)^{\alpha - 1} w_r(n) \tag{11}$$

$$(r = 1, 2 \ldots).$$

Hieraus folgt zunächst die Existenz der Grenzwerthe (4), wie man unmittelbar erkennen wird.

Nunmehr erhalten wir folgende Ausdrücke für die beiden Reihen der Functionen $\gamma_n^{(r)}$, worin jetzt $\mu > 0$ zu denken ist:

$$\gamma_n^{(-1)} = \frac{a_{n+k} e^{\mu n}}{1 - e^{-\mu}} \qquad - \gamma_n^{(-1)} = \frac{a_{n+k} e^{-\mu n}}{e^\mu - 1}$$

$$\gamma_n^{(0)} = \frac{a_{n+k} n^{1+\mu}}{\mu w(n)} \qquad - \gamma_n^{(0)} = \frac{a_{n+k} n^{1-\mu}}{\mu w(n)}$$

$$\gamma_n^{(r)} = \frac{a_{n+k} L_{r-1}(n) (\log_r n)^{1+\mu}}{\mu M^r w_r(n)} \qquad (r = 1, 2 \ldots)$$

$$- \gamma_n^{(r)} = \frac{a_{n+k} L_{r-1}(n) (\log_r n)^{1-\mu}}{\mu M^r w_r(n)}.$$

Und wir werden bemerken:

Die Reihe Σa_n convergirt, wenn eine positive Zahl μ gefunden werden kann, so dafs bei $\lim n = +\infty$ einer der Ausdrücke

$$a_{n+k} e^{\mu n}, \quad a_{n+k} n^{1+\mu}, \quad a_{n+k} n (\log n)^{1+\mu},$$
$$\ldots a_{n+k} L_{r-1}(n) (\log_r n)^{1+\mu} \ldots \tag{12}$$

einen endlichen Grenzwerth (positiv oder 0) hat.

Die Reihe Σa_n divergirt, wenn eine positive Zahl μ gefunden werden kann, so daſs bei $\lim n = +\infty$ einer der Ausdrücke

$$a_{n+k} e^{-\mu n}, \quad a_{n+k} n^{1-\mu}, \quad a_{n+k} n (\log n)^{1-\mu},$$
$$\ldots a_{n+k} L_{r-1}(n) (\log_r n)^{1-\mu} \ldots \tag{13}$$

einen positiven Grenzwerth hat.[22])

Die Divergenzcriterien (13) lauten, wenn $\mu = 1$ gesetzt wird: Der Grenzwerth bei $\lim n = +\infty$ der Functionen

$$a_{n+k}, \quad a_{n+k} n, \quad a_{n+k} n \log n \ldots a_{n+k} L_r(n) \ldots \tag{14}$$

ist positiv und nicht Null. — Es ist leicht einzusehen, daſs diese Folge gerade soviel leistet, wie die scheinbar allgemeinere (13).

Beispiele.

1) Die unendliche Reihe $\sum \frac{1}{n^\lambda}$ convergirt, wenn $\lambda > 1$; sie divergirt wenn $\lambda < 1$. — Folgt unmittelbar aus $a_n n^\lambda = 1$.

2) Die unendliche Reihe $\sum \frac{1}{L_r(n)}$ ist divergent, wie aus (14) unmittelbar folgt.

3) Die unendliche Reihe $\sum \frac{1}{L_{r-1}(n) (\log n)^\lambda}$ convergirt, wenn $\lambda > 1$; sie divergirt, wenn $\lambda < 1$. — Denn man hat hier

$$a_n L_{r-1}(n) (\log_r n)^\lambda = 1.$$

17. Convergenzcriterium zweiter Art.

Setzt man in (1)

$$\gamma_n = 1 : \lambda_n, \qquad \psi(n) = a_{n+k} \varphi(n);$$

so folgt

$$\lambda_n = \varphi(n) - \frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}} \varphi(n+1). \tag{15}$$

Nach Nr. 15 haben wir nun die Regel:

„Die Reihe Σa_n convergirt sicher, wenn eine positive Zahl $\varphi(n)$ gefunden werden kann, so daſs $a_{n+k}\varphi(n)$ eine monotone Function von n mit endlichem Grenzwerthe bei $\lim n = +\infty$ und auſserdem λ_n für alle Werthe von n von einem bestimmten an über einer positiven Zahl liegt (insbesondere $\lim \lambda_n > 0$)."

Das ist im Wesentlichen Kummer's Convergenzcriterium.[23]) P. du Bois-Reymond hat aber bemerkt, dafs aus der zweiten Bedingung unmittelbar die erste folge, so dafs wir den folgenden Satz erhalten:

„Ist $\varphi(n)$ positiv und bei jedem Werthe von $n \geqq m$ λ_n gröfser als eine Zahl $\alpha > 0$ (insbesondere $\lim \lambda_n > 0$), so convergirt Σa_n."

Beweis. Nach Voraussetzung ist

$$n \geqq m \quad \varphi(n) - \frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}} \varphi(n+1) > \alpha > 0,$$

daher

$$a_{n+k}\varphi(n) - a_{n+k+1}\varphi(n+1) > \alpha a_{n+k}, \tag{16}$$

woraus erhellt dafs

$$a_{n+k}\varphi(n) > a_{n+k+1}\varphi(n+1),$$

somit

$$a_{n+k}\varphi(n)$$

mit wachsendem n beständig abnimmt, also bei $\lim n = +\infty$ einen endlichen Grenzwerth $c \geqq 0$ hat. Daher convergirt (Nr. 1) die Reihe mit den positiven Gliedern

$$\sum_m^\infty{}^n [a_{n+k}\varphi(n) - a_{n+k+1}\varphi(n+1)]$$

und nach Nr. 4 zufolge (16) auch die Reihen $\sum_m^\infty{}^n a_{n+k}$ und Σa_n.

18. Würde man auf das Divergenzcriterium in Nr. 15 dieselbe Transformation anwenden, wie auf das Convergenzcriterium, so würde sich kein so einfaches Resultat ergeben. P. du Bois-Reymond hat jedoch den folgenden Satz gefunden.

Divergenzcriterium zweiter Art. „Ist $\varphi(n)$ eine positive Zahl und so gewählt, dafs die Reihe $\sum \frac{1}{\varphi(n)}$ divergirt, ist ferner für jeden Werth von $n \geqq m$ λ_n

negativ (insbesondere $\lim \lambda_n < 0$); so divergirt die Reihe Σa_n."

Der Beweis des Satzes ist sehr einfach. Aus

$$n \geqq m \qquad \varphi(n) - \frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}}\varphi(n+1) < 0$$

ergiebt sich

$$\frac{1}{\varphi(n+1)} : \frac{1}{\varphi(n)} = \frac{\varphi(n)}{\varphi(n+1)} < \frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}},$$

woraus nach dem 2. Satze in Nr. 4 unser Satz unmittelbar folgt.

Nimmt man in beiden Criterien zweiter Art für $\varphi(n)$ dieselbe Function, so erhält man ein disjunctives Criterium: „Ist $\lim \lambda_n > 0$, so convergirt Σa_n; ist $\lim \lambda_n < 0$, so divergirt diese Reihe; ist $\lim \lambda_n = 0$, so bleibt die Frage unentschieden."

Setzt man in (15) für $\varphi(n)$ nacheinander die Functionen

$$\varphi_0(n), \quad \varphi_1(n) \ldots \varphi_r(n) \ldots, \tag{17}$$

so erhält man eine geordnete Folge von disjunctiven Criterien zweiter Art, wenn diese Functionen so gewählt sind, dafs entsprechend

$$\lim \lambda_n^{(r)} \gtrless 0 \qquad \lambda_n^{(r)} = \varphi_r(n) - \frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}}\varphi_r(n+1)$$

auch $\lim \lambda_n^{(s)} \gtrless 0$ falls $s > r$; wenn aber $\lim \lambda_n^{(r)} = 0$, vielleicht irgend ein $\lim \lambda_n^{(s)}$ von Null verschieden ausfällt. Diese Forderungen können erfüllt sein, wenn man die Functionen (17) aufser den Beschränkungen, dafs $\varphi_r(n) > 0$ und $\sum \frac{1}{\varphi_r(n)}$ divergirt, noch den weiteren unterwirft, dafs

$$\lim \frac{\varphi_s(n)}{\varphi_r(n)} = +\infty$$

und

$$\lim l_n^{(r,s)} = 0, \quad l_n^{(r,s)} = \varphi_r(n) - \frac{\varphi_s(n)}{\varphi_s(n+1)}\varphi_r(n+1).$$

Setzt man nämlich in (15) zunächst eine Function $\varphi'(n)$, ebenfalls positiv und so gewählt, dafs $\sum \frac{1}{\varphi'(n)}$ divergirt, so findet man leicht

$$\lambda_n' = \varphi'(n) - \frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}}\,\varphi'(n+1) = \frac{\varphi'(n+1)}{\varphi(n+1)}\,\{\lambda_n - l_n\},$$

$$l_n = \varphi(n) - \frac{\varphi'(n)}{\varphi'(n+1)}\,\varphi(n+1).$$

Daraus folgt: Wenn

$$\lim l_n = 0$$

und

$$\lim \{\varphi'(n) : \varphi(n)\} > 0,$$

so haben $\lim \lambda_n'$ und $\lim \lambda_n$ dasselbe Zeichen, der letztere von Null verschieden vorausgesetzt. Ist aber

$$\lim \lambda_n = 0$$

und es soll

$$\lim \lambda_n' \gtrless 0$$

sein, so mufs

$$\lim \{\varphi'(n) : \varphi(n)\} = +\infty$$

sein, womit aber nicht gesagt sein soll, dafs jetzt wirklich $\lim \lambda_n'$ nicht Null sein wird. — Es ist nicht unwesentlich hinzuzufügen: „Wenn die Reihen $\sum \frac{1}{\varphi(n)}$ und $\sum \frac{1}{\varphi'(n)}$ divergiren, $\frac{\varphi'(n)}{\varphi(n)}$ mit n beständig wächst und wenn l_n bei $\lim n = +\infty$ überhaupt einen Grenzwerth hat, so mufs er Null sein.“ Denn aus

$$l_n = \varphi'(n)\left\{\frac{\varphi(n)}{\varphi'(n)} - \frac{\varphi(n+1)}{\varphi'(n+1)}\right\} \qquad \frac{\varphi(n)}{\varphi'(n)} < \frac{\varphi(n+1)}{\varphi'(n+1)}$$

folgt $\lim l_n > 0$ oder gleich 0. Die erstere Annahme ist hier unmöglich, da nach Nr. 17 die Reihe $\sum \frac{1}{\varphi'(n)}$ convergiren müfste.

Den nacheinander eingeführten Bedingungen entsprechen die Functionen

$$\varphi_0(n) = 1 \quad \varphi_1(n) = n \quad \varphi_2(n) = n \log n \ldots$$
$$\varphi_r(n) = L_{r-1}(n). \tag{18}$$

Namentlich finden wir für

$$l_n^{(r,s)} = \frac{L_{s-1}(n)}{\log_r(n+1)\ldots\log_{s-1}(n+1)} \times$$
$$\left\{\left[\frac{\log_r(n+1)}{\log_r n} \cdot \ldots \cdot \frac{\log_{s-1}(n+1)}{\log_{s-1} n}\right] - 1\right\} \qquad (s > r \geqq 1).$$

Nach (10) ergiebt sich, dafs

$$\frac{\log_r(n+1)}{\log_r n}\cdot\frac{\log_{r+1}(n+1)}{\mathrm{og}_{r+1} n}=1+\frac{M^r\,V_r^{(1)}(n)}{L_r(n)},$$

$$\lim V_r^{(1)}(n)=1;$$

und daraus allgemein

$$\frac{\log_r(n+1)}{\log_r n}\cdot\frac{\log_{r+1}(n+1)}{\log_{r+1} n}\cdot\ldots\cdot\frac{\log_{s-1}(n+1)}{\log_{s-1} n}$$

$$=1+\frac{M^r\,V_r^{(s-r)}(n)}{L_r(n)},\qquad \lim V_r^{(s-r)}(n)=1.$$

Demnach hat man

$$l_n^{(r,s)}=\frac{M^r\,V_r^{(s-r)}(n)}{\log_r n}\cdot\frac{\log_r n}{\log_r(n+1)}\cdot\frac{\log_{r+1} n}{\log_{r+1}(n+1)}\cdot\ldots$$

$$\cdot\frac{\log_{s-1} n}{\log_{s+1}(n+1)},$$

so dafs in der That dafür bei $\lim n=+\infty$ ein Grenzwerth existirt. Dafs er Null ist, weifs man schon von vorneherein.

Setzen wir nun in (15) für $\varphi(n)$ die Functionen (18) ein, so erhalten wir die logarithmischen Criterien zweiter Art.[24])

Σa_n convergirt oder divergirt, je nachdem bei $\lim n=+\infty$

$$\lim\left(1-\frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}}\right) \tag{19}$$

positiv oder negativ; je nachdem

$$\lim\left\{n-\frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}}(n+1)\right\} \tag{20}$$

positiv oder negativ; allgemein, je nachdem

$$\lim\left\{L_r(n)-\frac{a_{n+k-1}}{a_{n+k}}L_r(n+1)\right\}\qquad (r=1,2\ldots), \tag{21}$$

positiv oder negativ.

19. Das erste der vorstehenden Criterien ist uns schon aus Nr. 4 bekannt. Σa_n convergirt oder divergirt, je nachdem $\lim\frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}}<1$ oder >1. Die folgenden Criterien werden meistens ausreichen, wenn der soeben erwähnte Grenzwerth $= 1$ ist. In diesem Falle lassen sie noch eine Vereinfachung zu. Da

$$n - \frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}}(n+1) = n\left(1 - \frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}}\right) - \frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}},$$

so ist der Grenzwerth (20) positiv oder negativ, je nachdem der des ersten Theiles rechts $>$ oder < 1 ist. So erhalten wir das Raabe'sche Criterium:[25]) Wenn

$$\lim\,(a_{n+k+1} : a_{n+k}) = 1,$$

so convergirt oder divergirt Σa_n, je nachdem

$$\lim n\left(1 - \frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}}\right) > 1 \text{ oder } < 1. \tag{22}$$

Dabei ist $\lim a_n = 0$ oder $\pm\infty$, je nachdem dieser Grenzwerth positiv oder negativ.

Setzt man nämlich

$$n\left(1 - \frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}}\right) = \varphi(n), \quad \frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}} = 1 - \frac{\varphi(n)}{n},$$

so findet man

$$a_n = a_{m+k} \prod_{m}^{n-k-1}{}_{p} \left\{1 - \frac{\varphi(p)}{p}\right\}.$$

Ist $\lim \varphi(n) = \mu$ und $\mu > 0$, so wird für $p > \nu$

$$\varphi(p) > \mu - \varepsilon > 0$$

sein, so dafs $\sum \frac{\varphi(p)}{p}$ divergirt (Nr. 4, 3. Satz) und nach Nr. 12 $\lim a_n = 0$. Ist $\mu < 0$, so hat man für $p > \nu$

$$\varphi(p) < \mu + \varepsilon < 0,$$

so dafs $\varphi(p) : p$ schliefslich negativ wird und $\sum \frac{\varphi(p)}{p}$ divergirt und $\lim a_n$ entweder $+\infty$ oder $-\infty$ ist.

Für den allgemeinen Ausdruck (21) erhält man

$$\begin{aligned} L_r(n) - \frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}} L_r(n+1) \\ &= \left[L_{r-1}(n) - \frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}} L_{r-1}(n+1)\right] \log_r n \\ &- \frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}}\left\{\log_r(n+1) - \log_r(n)\right\} L_{r-1}(n+1). \end{aligned}$$

Der zweite Theil rechts liefert nach (10)

$$\frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}} M^r v_r(n) \frac{L_{r-1}(n+1)}{L_{r-1}(n)},$$

hat also in unserem Falle bei $\lim n = +\infty$ den Grenzwerth M^r. Wir haben somit den Satz:

Wenn $\lim (a_{n+k+1} : a_{n+k}) = 1$, so convergirt oder divergirt Σa_n, je nachdem

$$\lim\left\{L_{r-1}(n) - \frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}} L_{r-1}(n+1)\right\}\log_r n > M^r \\ \text{oder} < M^r \; (r = 1, 2 \ldots). \tag{23}$$

Wenn dieser Grenzwerth nicht $-\infty$ ist, so wird a_n sicher schliefslich monoton und es ist sicher $\lim a_n = 0$.

Der zweite Theil des Satzes ergiebt sich aus folgender Bemerkung. „Setzt man

$$\frac{1}{n} + \frac{M}{L_1(n)} + \cdots + \frac{M^r}{L_r(n)} = P_r(n) \quad (r \geqq 0)$$

und

$$\left(1 - P_{r-1}(n) - \frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}}\right) L_r(n) = \psi_r(n),$$

so hat $\psi_r(n)$ bei $\lim n = +\infty$ denselben Grenzwerth, wie

$$\varphi_r(n) = \left\{L_{r-1}(n) - \frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}} L_{r-1}(n+1)\right\}\log_r(n)$$

und umgekehrt.“ Man hat nämlich

$$\psi_r(n) = \frac{L_{r-1}(n)}{L_{r-1}(n+1)}\varphi_r(n) - \frac{L_r(n)}{n^2} W_r(n), \tag{23^a}$$

wo wieder $\lim W_r(n) = 1$. — Zunächst ist

$$\frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}} = \frac{L_{r-1}(n)}{L_{r-1}(n+1)} - \frac{\varphi_r(n)}{\log_r(n)} \cdot \frac{1}{L_{r-1}(n+1)}.$$

Ist $r = 1$, so findet man (23^a) unmittelbar wegen

$$\frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{W_0(n)}{n^2}. \tag{23^{a*}}$$

Ist $r \geqq 2$, so ist zu zeigen, dafs für $s \geqq 1$

$$\frac{L_s(n)}{L_s(n+1)} = 1 - P_s(n) + \frac{W_s(n)}{n^2}; \tag{23^b}$$

woraus dann Gl. (23^a) unmittelbar folgt. Hierzu gebraucht man die weitere Entwickelung von $v_r(n)$ in (10). Es ist

$$\frac{\log_r(n+1)}{\log_r(n)} = 1 + \frac{M^r}{L_r(n)}\left\{1 - \frac{v'_r(n)}{2n}\right\} \quad (\lim v'_r(n) = 1). \quad (23^c)$$

Nach XI. 5 findet man nämlich, wofern $|x| < 1$,

$$\log(1+x) = Mx\left\{1 - \frac{x}{2}v'(x)\right\} \quad \left(\lim_{x=0} v'(x) = 1\right),$$

somit für $x = \frac{1}{n}$ nach Division durch $\log n$

$$\frac{\log(n+1)}{\log(n)} = 1 + \frac{M}{L_1(n)}\left\{1 - \frac{v_1'(n)}{2n}\right\}.$$

Vermittelst ebenderselben Formel beweist man (23^c) durch den Schlufs von r auf $(r+1)$. Aus (23^c) leiten wir ab die Gleichung

$$\frac{\log_r(n)}{\log_r(n+1)} = 1 - \frac{M^r}{L_r(n)}\left\{1 - \frac{w_r(n)}{2n}\right\} \quad (\lim w_r(n) = 1)$$

und daraus, indem wir $r = 1, 2 \ldots . s$ setzen und die bezüglichen Gleichungen mit einander und mit (23^{a*}) multipliciren, endlich die Formel (23^b).

Setzt man jetzt

$$\frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}} = 1 - P_{r-1}(n) - \frac{\psi_r(n)}{L_r(n)} \qquad (23^d)$$

und bemerkt, dafs

$$a_n = a_{m+k}\prod_{m}^{n-k-1}{}_{p}\left\{1 - P_{r-1}(p) - \frac{\psi_r(p)}{L_r(p)}\right\},$$

so sieht man sofort ein, dafs $\lim a_n = 0$ sein mufs. Denn da

$$P_{r-1}(p) + \frac{\psi_r(p)}{L_r(p)}$$

$$= \frac{1}{p}\left\{1 + \frac{M}{\log p} + \cdots + \frac{M^{r-1}p}{L_{r-1}(p)} + \frac{p\psi_r(p)}{L_r(p)}\right\},$$

worin der zweite Factor, wenn $\lim \psi_r(p)$ nicht $-\infty$, einen positiven Grenzwerth (eventuell $+\infty$) haben mufs, so divergirt die Reihe, deren allgemeines Glied dieser Ausdruck ist.

Die wichtigste Anwendung der vorstehenden Sätze bildet die folgende Regel.

„Angenommen, es sei für alle Werthe $n \geqq m$ a_{n+k} nicht Null und es lasse sich $\frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}}$ auf die Form bringen

$$\frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}} = 1 + \frac{\mu}{n} + \frac{\omega(n)}{n^\lambda}, \tag{24}$$

wo μ, λ Constante, die letztere > 1, $\omega(n)$ eine Function bedeutet, die bei $\lim n = +\infty$ einen endlichen Grenzwerth hat; so kann man schliefsen:

1) „Dafs die a_n von einem bestimmten Werthe von n an gleichbezeichnet und einsinnige Functionen von n sind. Es existirt also $\lim a_n$ und zwar ist er bei $\mu > 0$ unendlich, bei $\mu < 0$ Null; bei $\mu = 0$ weder 0 noch unendlich. Doch mufs, wenn im letzten Falle $\lim \omega(n) = 0$, noch angenommen werden, dafs $\omega(n)$ schliefslich ein und dasselbe Zeichen behält.“

2) „Dafs die Reihe Σa_n divergirt, wenn $\mu \geqq -1$; convergirt, wenn $\mu < -1$.“

Die Behauptungen im Falle $\mu \gtrless -1$ ergeben sich aus (22), nur dafs bei $\mu = 0$ $\lim a_n$ weder 0 noch unendlich ist, ist nach Nr. 12 zu zeigen durch Betrachtung des Productes

$$a_n = a_{m+k} \prod_{m}^{n-k-1}{}_p \left\{1 + \frac{\omega(p)}{p^\lambda}\right\} \quad (\lambda > 1),$$

worin die convergente Reihe $\sum \frac{\omega(p)}{p^\lambda}$ vorkommt (Nr. 4, 3). — Wenn $\mu = -1$, gebraucht man das erste Criterium (23) oder setzt in (23^d) $r = 1$

$$\psi_1(n) = -\omega(n) \log n : n^{\lambda-1}.$$

Da $\lim \psi_1(n) = 0$, so divergirt Σa_n.

Die vorstehende Regel wird insbesondere dann gebraucht, wenn der Quotient $a_{n+k+1} : a_{n+k}$ in eine endliche oder convergente unendliche Reihe nach fallenden Potenzen von n entwickelt werden kann,[26]) d. h. wenn für $n \geqq m$

$$\frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}} = 1 + \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \frac{a_3}{n^3} + \cdots\cdot \tag{25}$$

Dann ist $\mu = a_1$ $\lambda = 2$ und

$$\omega(n) = a_2 + \frac{a_3}{n} + \cdots\cdot,$$

so dafs nach Nr. 23 $\lim \omega(n) = a_2$. Wenn $a_2 = 0$, hat man doch $\lim \omega(n) = +0$ oder -0.

Beispiel. [27]) Ist

$$\frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}} = \frac{n^r + b_1 n^{r-1} + b_2 n^{r-2} + \cdots + b_r}{n^r + c_1 n^{r-1} + c_2 n^{r-2} + \cdots + c_r} = R(n),$$

wo im Zähler und Nenner ganze Functionen r^{ten} Grades von n stehen; so kann man die rechte Seite leicht auf die Form (24) bringen, indem man Zähler und Nenner durch n^r dividirt. Die rationale Function $R(n)$ läfst sich auch in eine Reihe von der Form (25) entwickeln. Zunächst hat man

$$n^r + b_1 n^{r-1} + \cdots b_r = n^r \left\{1 + \frac{b_1}{n} + \frac{b_2}{n^2} + \cdots + \frac{b_r}{n^r}\right\}$$

$$n^r + c_1 n^{r-1} + \cdots c_r = n^r \left\{1 + \nu_n\right\}$$

$$\nu_n = \frac{c_1}{n} + \frac{c_2}{n^2} + \cdots + \frac{c_r}{n^r}.$$

Da $\lim \nu_n = 0$, so ist

$$\frac{1}{1 + \nu_n} = 1 - \nu_n + \nu_n^2 - \cdots$$

für alle n gröfser als eine gewisse Zahl $\mu > 0$. Nach dem Satze in Nr. 25 kann man diesen Ausdruck für alle $(1 : n) < \varkappa$ in eine absolut convergirende Reihe nach Potenzen von $1 : n$ verwandeln. Es ist

$$\frac{1}{1 + \nu_n} = 1 - \frac{c_1}{n} + \frac{c_1^2 - c_2}{n^2} + \cdots;$$

also nach dem 7. Satze in Nr. 10

$$R(n) = 1 + \frac{b_1 - c_1}{n} + \frac{b_2 - b_1 c_1 + c_1^2 - c_2}{n^2} + \cdots$$

Somit convergirt Σa_n, wenn $b_1 - c_1 < -1$; die Reihe divergirt, wenn $b_1 - c_1 \geqq -1$.

Weitere Beispiele s. XI. 2, 4.

20. Criterien für alternirende Reihen. Es seien $a_0, a_1, a_2 \ldots\ldots$ positive Zahlen und die unendliche Reihe $a_0 - a_1 + a_2 - \cdots$ vorgelegt, die wir kurz mit $\Sigma(-1)^n a_n$ bezeichnen.

Satz. 1) „Die Reihe $\Sigma(-1)^n a_n$ convergirt [und zwar absolut] oder divergirt, je nachdem $\lim (a_{n+k+1} : a_{n+k}) < 1$ oder > 1. Im letzteren Falle sind die Unbestimmtheitsgrenzen von

$$s_n = a_0 - a_1 + \cdots + (-1)^n a_n$$

bei $\lim n = +\infty$ $+\infty$ und $-\infty$."

2) „Läfst sich für alle Werthe von $n \geqq m$ der Quotient $a_{n+k+1} : a_{n+k}$ auf die Form (24)

$$\frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}} = 1 + \frac{\mu}{n} + \frac{\omega(n)}{p^\lambda} \qquad (\lambda > 1)$$

bringen, so convergirt $\Sigma(-1)^n a_n$, wenn $\mu < 0$; und zwar absolut, wenn $\mu < -1$; nicht absolut, wenn $0 > \mu \geqq -1$."

„$\Sigma(-1)^n a_n$ divergirt, wenn $\mu > 0$ und wenn $\mu = 0$ und $\omega(n)$ schliefslich ein und dasselbe Zeichen behält. Im ersteren Falle sind die Unbestimmtheitsgrenzen von s_n bei $\lim n = +\infty$ $+\infty$ und $-\infty$, im zweiten Falle sind sie endlich und von einander verschieden."

Beispiele s. XI. 2, 4, 8.

Beweis. Die absolute Convergenz $\Sigma(-1)^n a_n$ in den oben erwähnten Fällen folgt unmittelbar aus der in der vorigen Nr. aufgestellten Regel. — Die nicht absolute Convergenz unserer Reihe, wenn $0 > \mu \geqq -1$, folgt aus Nr. 8; da a_n von einem gewissen Werthe von n an mit wachsenden n beständig abnimmt und $\lim a_n = 0$. — Wo die Divergenz von $\Sigma(-1)^n a_n$ angegeben ist, ergiebt sich dieselbe stets daraus, dafs $\lim a_n$ von Null verschieden ist (Nr. 1).

Umständlicher gestaltet sich der Nachweis der dort, wo $\Sigma(-1)^n a_n$ divergirt, angezeigten Unbestimmtheitsgrenzen von s_n bei $\lim n = +\infty$. Wir setzen, unter l einen beliebigen Index verstanden,

$$a_{l+1} - a_{l+2} + \cdots + (-1)^{p-1} a_{l+p} = r_{l,p},$$

$$s_{l+p} = s_l + (-1)^{l+1} r_{l,p},$$

und untersuchen das Verhalten von $r_{l,p}$ bei $\lim p = +\infty$. Ist

$\lim(a_{n+k+1} : a_{n+k}) > 1$ oder im zweiten Theile unseres Satzes $\mu > 0$, so kann man behaupten, dafs positive Zahlen μ' existiren, so dafs

$$n\left(\frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}} - 1\right) > \mu' > 0,$$

wenn nur $n \geqq m$. Es ist nämlich der Grenzwerth der linken Seite bei $\lim n = +\infty$ entweder $+\infty$ oder μ. Man hat somit

$$a_{n+k+1} - a_{n+k} > \frac{\mu'}{n} a_{n+k}.$$

Und weiter für $l = m + k$

$$r_{l,2q} < -\mu'\left\{\frac{a_{l+1}}{l-k+1} + \frac{a_{l+3}}{l-k+3} + \cdots + \frac{a_{l+2q-1}}{l-k+2q-1}\right\},$$

$$r_{l,2q+1} > \mu'\left\{\frac{a_{l+2}}{l-k+2} + \frac{a_{l+4}}{l-k+4} + \cdots + \frac{a_{l+2q}}{l-k+2q}\right\}.$$

Nun wachsen die a_{l+p} mit p beständig, so dafs sich ergiebt

$$r_{l,2q} < -\mu' a_{l+1}\left\{\frac{1}{l-k+1} + \frac{1}{l-k+3} + \cdots + \frac{1}{l-k+2q+1}\right\},$$

$$r_{l,2q+1} > \mu' a_{l+2}\left\{\frac{1}{l-k+2} + \frac{1}{l-k+4} + \cdots + \frac{1}{l-k+2q}\right\},$$

woraus vermöge der Divergenz der harmonischen Reihen geschlossen werden kann

$$\lim_{q=+\infty} r_{l,2q} = -\infty, \qquad \lim_{q=+\infty} r_{l,2q+1} = +\infty.$$

Wenn $\mu = 0$ im zweiten Theile des Satzes, so genügt die Betrachtung eines der Ausdrücke $r_{l,2q}$, $r_{l,2q+1}$, da aus der Gleichung

$$r_{l,2q+1} = r_{l,2q} + a_{l+2q+1}$$

sich ergiebt, dafs wenn einer derselben bei $\lim q = +\infty$ einen endlichen Grenzwerth besitzt, so auch der andere. Wir haben nun zu unterscheiden, ob der endliche $\lim \omega(n)$ negativ, bez. -0, oder ob er positiv, bez. $+0$. Im ersteren Falle nehmen die a_n von einem gewissen Werthe des Index an mit demselben beständig ab, so dafs wir nach Nr. 8 bemerken können, dafs $r_{l,1} > r_{l,3} > r_{l,5} \cdots$ Es existirt mithin bei $\lim q = +\infty$ ein Grenzwerth für $r_{l,2q+1}$, der aber nicht $-\infty$ sein kann. Da $\lim \omega(n) = -\gamma$ $(\gamma > 0)$, so hat man, was auch $\varepsilon > 0$ sein mag, einen Index m, so dafs

$$n > m \qquad 1 - \frac{(\gamma+\varepsilon)}{n^\lambda} < \frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}} < 1, \quad \text{d. i.}$$

$$-\frac{(\gamma+\varepsilon) a_{n+k}}{n^\lambda} < a_{n+k+1} - a_{n+k} < 0.$$

Setzt man $m + k = l$, so folgt weiter

$$r_{l,\,2q+1} > -(\gamma + \varepsilon)\left\{\frac{a_{l+2}}{(l-k+2)^\lambda} + \frac{a_{l+4}}{(l-k+4)^\lambda} + \cdots + \frac{a_{l+2q}}{(l-k+2q)^\lambda}\right\},$$

also auch

$$r_{l,\,2q+1} > -(\gamma + \varepsilon)a_{l+2}\left\{\frac{1}{(l-k+2)^\lambda} + \frac{1}{(l-k+4)^\lambda} + \cdots + \frac{1}{(l-k+2q)^\lambda}\right\}.$$

Es convergirt aber nach Nr. 16 die unendliche Reihe mit dem allgemeinen Gliede $\dfrac{1}{(l-k+2q)^\lambda}$, da $\lambda > 1$. Bezeichnet man ihre Summe mit σ, so folgt

$$r_{l,\,2q+1} > -(\gamma + \varepsilon)a_{l+2}\sigma,$$

und weiter

$$\lim_{q=+\infty} r_{l,\,2q+1} > -(\gamma + \varepsilon)a_{l+2}\sigma.$$

Ganz ähnlich wird der Beweis im zweiten Falle geführt, wo die a_n schliefslich mit dem Index beständig wachsen.

NB. Wenn der Quotient $a_{n+k+1} : a_{n+k}$ in der Form (25) gegeben ist, so läfst sich der vorstehende Satz auch mittelst der in der vorigen Nr. gegebenen Regel ableiten, indem nun auch der Quotient $\dfrac{a_{n+k+3} - a_{n+k+2}}{a_{n+k+1} - a_{n+k}}$ nach fallenden Potenzen von n entwickelt werden kann.

21. Reihen, deren Glieder Functionen einer Veränderlichen sind. Für einen und denselben Bereich der unabhängigen Veränderlichen x seien die Functionen

$$f_0(x),\ f_1(x),\ f_2(x) \cdots\cdots f_n(x) \cdots$$

in unbegrenzter Anzahl erklärt und zugleich die unendliche Reihe

$$f_0(x) + f_1(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots \tag{1}$$

convergent. $f(x)$ bedeute ihren Grenzwerth. Setzt man

$$f_0(x) + f_1(x) + \cdots + f_n(x) = s_n(x);$$

so ist demnach

$$\lim_{n=+\infty} s_n(x) = f(x).$$

Indem $s_n(x)$ von zwei unabhängigen Veränderlichen n, x abhängt, so treten die Bemerkungen in IX. 19 in Kraft. Man hat somit die gleichmäfsige und ungleichmäfsige Convergenz von $s_n(x)$ bei $\lim n = +\infty$ zum Grenzwerthe $f(x)$ oder, wie man sagt, der Reihe (1) in dem für die unabhängige Veränderliche x festgesetzten Bereiche zu unterscheiden. Da

$$f(x) - s_n(x) = r_n(x) = f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots,$$

so führt die a. a. O. gegebene Definition zu folgender Aussage, wobei wir beispielsweise annehmen, dafs für x das endliche Intervall (a, b) mit Einschlufs der Grenzen $x = a$ und $x = b$ vorgeschrieben sei. „Die unendliche Reihe (1) convergirt gleichmäfsig für alle Werthe von x:

$$a \leqq x \leqq b,$$

wenn zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\mu > 0$ gehört, so dafs für alle Werthe $n > \mu$

$$|r_n(x)| < \varepsilon, \tag{2}$$

welcher der soeben erwähnten Werthe auch der Veränderlichen x beigelegt werden mag.“ Oder: $r_n(x)$ convergirt bei $\lim = +\infty$ zum Grenzwerthe 0 gleichmäfsig für die genannten Werthe von x. Diese Definitionen setzen indessen voraus, dafs man von der Convergenz der Reihe (1) schon unterrichtet sei. Will man davon absehen, so heifst es: die Reihe (1) convergirt und zwar gleichmäfsig für alle $a \leqq x \leqq b$, wenn zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\mu > 0$ gehört, so dafs für alle Werthe $n > \mu$

$$|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots + f_{n+p}(x)| < \varepsilon \qquad (p = 1, 2 \cdots), \tag{3}$$

welchen der erwähnten Werthe auch die Veränderliche x erhalten mag. Daraus folgt wieder, wenn $\varepsilon' < \varepsilon$,

$$|r_n(x)| \leqq \varepsilon' < \varepsilon,$$

wenn nur $n > \mu'$. — Umgekehrt folgt auch aus (2) die Relation (3), da hier $r_n(x) - r_{n+p}(x)$ steht.

Zunächst ist von Interesse der Fall, dafs jede Function

$f_n(x)$ $(n = 0, 1, 2 \ldots)$ für die Werthe $a < x \leqq b$ stetig sei. Es entsteht die Frage, ob die Reihensumme $f(x)$ ebenfalls eine für alle diese Werthe von x stetige Function sei. Cauchy behauptete es, Abel bemerkte jedoch, daſs Ausnahmen vorkommen.[28]) So finden wir für die unendliche Reihe

$$(1-x) + (1-x)x + (1-x)x^2 + \cdots + (1-x)x^n + \cdots$$

$$f(x) = (1-x) \cdot \frac{1}{1-x} = 1 \quad \text{für} \quad 0 \leqq x < 1;$$

hingegen $f(1) = 0$. — Für die Reihe

$$f(x) = (1-x)x + (1-x^2)x^2 + (1-x^3)x^3 + \cdots$$

findet man $f(1) = 0$, dagegen falls $|x| < 1$

$$f(x) = \sum_1^\infty {}^n x^n - \sum_1^\infty {}^n x^{2n} = \frac{x}{1-x} - \frac{x^2}{1-x^2} = \frac{x}{1-x^2},$$

so daſs bei $\lim x = 1 - 0$ sogar $\lim f(x) = +\infty$. — Abel gelangte nicht mehr zur vollständigen Einsicht über den Grund eines solchen Verhaltens;[29]) erst Seidel[30]) erkannte die ungleichmäſsige Convergenz der Reihe als die Ursache der Unstetigkeit. In unseren Beispielen tritt sie unmittelbar hervor. Denn man hat für $0 \leqq x < 1$ z. B. im ersten Falle

$$r_n(x) = (1-x)x^{n+1} + (1-x)x^{n+2} + \cdots = x^{n+1},$$

welche Function nach IX. 19 bei $\lim n = +\infty$ ungleichmäſsig für die genannten Werthe von x zur Null convergirt.

Richtig ist der folgende Satz:

„Ist $f_n(x)$ — $n = 0, 1, 2 \ldots$ — für alle Werthe $a \leqq x \leqq b$ eine stetige Function von x und convergirt die unendliche Reihe (1) gleichmäſsig für die genannten Werthe von x; so ist ihr Grenzwerth $f(x)$ eine stetige Function für alle Werthe von x im Intervalle (a, b), die Grenzen $x = a$ und $x = b$ eingeschlossen.“

Der Satz ist enthalten in dem analogen, allgemeineren Satze in IX. 19; sein Beweis wird demnach so zu führen sein. Ist m eine natürliche Zahl gröſser als μ, so hat man $|r_m(x)| < \varepsilon$ für alle $a \leqq x \leqq b$. Bezeichnet man mit x_0 irgend einen dieser Werthe und bemerkt, daſs

$$f(x_0 + \xi) - f(x_0) = \{s_m(x_0 + \xi) - s_m(x_0)\} \\ + r_m(x_0 + \xi) - r_m(x_0),$$

und dafs der Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta_m > 0$ zugeordnet werden kann, so dafs für

$$|\xi| < \delta_m \qquad |s_m(x_0 + \xi) - s_m(x_0)| < \varepsilon;$$

so erkennt man sofort, dafs auch für

$$|\xi| < \delta_m \qquad |f(x_0 + \xi) - f(x_0)| < 3\varepsilon$$

w. z. b. w.

Wir können noch hinzufügen: „Wenn die Reihe (1) für alle Werthe $a < x < b$ gleichmäfsig convergirt, so mufs sie auch für $x = a$ und $x = b$ convergiren, so dafs sie selbstverständlich gleichmäfsig convergirt für alle $a \leqq x \leqq b$.“ Denn es ist, wenn $n > \mu$, nach (3)

$$0 < \xi < b - a \qquad |f_{n+1}(a + \xi) + f_{n+2}(a + \xi) + \cdots \\ + f_{n+p}(a + \xi)| < \varepsilon;$$

ferner hat man

$$\left|\sum_{n+1}^{n+p} \{f_s(a + \xi) - f_s(a)\}\right| < \varepsilon$$

für alle $0 < \xi < \delta_{n,\,p}$; somit für $n > \mu$

$$|f_{n+1}(a) + f_{n+2}(a) + \cdots + f_{n+p}(a)| < 2\varepsilon,$$

welchen der Werthe 1, 2 ... auch p annehmen mag. D. h. die Reihe (1) convergirt für $x = a$.

Es ist wichtig hervorzuheben, dafs man den ersten dieser Sätze nicht umkehren darf. Die Reihensumme $f(x)$ kann für alle $a < x < b$ stetig sein und die Reihe doch ungleichmäfsig convergiren.[31]) Ein solches Verhalten zeigt die folgende Reihe.

Es sei

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2x^2} - \frac{(n+1)x}{1 + (n+1)^2x^2} = x\,\frac{n(n+1)x - 1}{(1 + n^2x^2)[1 + (n+1)^2x^2]} \\ (n = 0, 1, 2 \ldots),$$

so dafs nach Nr. 1 die Summe $f(x) = 0$ für alle $0 \leqq x \leqq 1$. [Man wird bemerken, dafs bei jedem Werthe $x > 0$ die Glieder schliefslich positiv sind; dafs jedoch keine ganze Zahl m existirt, so dafs wenn

$n > m$ alle Glieder positiv sind, gleichviel welchen Werth im Intervalle (0, 1) x annehmen mag.] Hier findet man

$$r_{n-1}(x) = f_n(x) + f_{n+1}(x) + \cdots = \frac{nx}{1 + n^2x^2}.$$

Die Discussion der Relation — $\varepsilon > 0$ —

$$\frac{nx}{1 + n^2x^2} \lesseqgtr \varepsilon$$

liefert zunächst

$$\frac{1}{4\varepsilon^2} - 1 \lesseqgtr \left(nx - \frac{1}{2\varepsilon}\right)^2.$$

Nimmt $\varepsilon \leqq \frac{1}{2}$ an, so ergiebt sich, dafs $0 < r_{n-1}(x) \leqq \varepsilon$, wenn

$$nx \geqq \frac{1}{2\varepsilon} + \sqrt{\frac{1}{4\varepsilon^2} - 1} \quad \text{oder} \quad nx \leqq \frac{1}{2\varepsilon} - \sqrt{\frac{1}{4\varepsilon^2} - 1};$$

dafs aber $r_{n-1}(x) > \varepsilon$, wenn

$$\frac{1}{2\varepsilon} + \sqrt{\frac{1}{4\varepsilon^2} - 1} > nx > \frac{1}{2\varepsilon} - \sqrt{\frac{1}{4\varepsilon^2} - 1}.$$

Dabei ist die Quadratwurzel positiv gedacht Würde eine Zahl $\mu > 0$ existiren, so dafs bei $n > \mu$ $0 < r_{n-1}(x) < \varepsilon$ für alle Werthe $0 \leqq x \leqq 1$; so müfste

$$\mu \geqq \frac{1}{x}\left\{\frac{1}{2\varepsilon} + \sqrt{\frac{1}{4\varepsilon^2} - 1}\right\}$$

sein; was aber unmöglich ist, da der Ausdruck rechts bei $\lim x = +0$ den Grenzwerth $+\infty$ hat. — Um sich von der ungleichmäfsigen Convergenz der in Rede stehenden Reihe zu überzeugen, würde die Bemerkung genügen $r_{n-1}\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}\cdot$ In der That, betrachtet man nur die Werthe $x = \frac{1}{m}$ (m natürliche Zahl), so hat man mindestens $m + 1$ Glieder zu summiren, damit der Rest unter $\frac{1}{2}$ sinkt.

Anmerkung. Die vorstehenden Sätze sind ein besonderer Fall des auf ähnliche Art zu erweisenden Satzes: „Angenommen, es sei bei einem und demselben Grenzübergange $\lim x$ z. B. $= a + 0$ für $f_n(x)$ ($n = 0, 1, 2 \ldots$) je ein endlicher Grenzwerth b_n vorhanden und es convergire die Reihe $\Sigma f_n(x)$ gleichmäfsig für alle x gemäfs Definition beizulegenden Werthe $a < x \leqq a + d$; so convergirt die Reihe $\sum_0^\infty {}_n b_n$ und man hat

$$\lim_{x=a+0} \sum_0^\infty {}^n f_n(x) = \sum_0^\infty {}^n b_n."$$

In anderen Fällen gilt diese Formel nicht immer, wie die obigen Beispiele zeigen.

22. Reihen nach ganzen positiven Potenzen einer Veränderlichen. Zunächst ist zu untersuchen, ob und für welchen Bereich der Veränderlichen x eine Reihe von der Form

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \tag{1}$$

convergirt. Hierzu dient der folgende Satz:

„Wenn für einen bestimmten Werth $x = x_0$ alle Glieder einer Potenzreihe (1) ihrem absoluten Betrage nach eine endliche Zahl g nicht überschreiten, so convergirt sie und zwar absolut für alle Werthe von x, welche dem absoluten Betrage nach kleiner sind als x_0."

Beweis. Setzt man

$$|x| = X, \quad |x_0| = X_0, \quad |a_n| = A_n,$$

so hat man zufolge Voraussetzung

$$A_n X_0^n \leq g,$$

also

$$A_n X^n \leq g \left(\frac{X}{X_0}\right)^n, \ (n = 0, 1, 2 \ldots).$$

Es convergirt aber die geometrische Reihe

$$g + g\left(\frac{X}{X_0}\right) + g\left(\frac{X}{X_0}\right)^2 + \cdots,$$

wenn $X < X_0$, somit nach Nr. 4 auch die Reihe

$$A_0 + A_1 X + A_2 X^2 + \cdots \tag{2}$$

Zugleich erkennt dann, dafs für $X < X_0$ die Summe der Reihe (1) dem absoluten Betrage nicht über der Zahl $g : \left\{1 - \frac{X}{X_0}\right\}$ liegen kann.

Aus dem soeben bewiesenen Satze folgt: „Divergirt die Reihe (1) für $x = x_0$, so divergirt sie auch für jeden Werth von x, welcher dem absoluten Betrage nach gröfser ist als x_0." Denn würde sie convergiren für einen solchen Werth x, dafs $X > X_0$, so würden die Glieder $A_n X^n$ unter einer endlichen Zahl g liegen; also würde (1) auch für $x = x_0$ convergiren.

Nun kann nur Folgendes eintreten:

1) Es convergirt die Reihe (1) für gar keinen Werth aufser $x = 0$.

2) Die Potenzreihe ist beständig convergent, d. h. sie convergirt für jeden endlichen Werth von x.

3) Die Reihe (1) convergirt für einen von Null verschiedenen Werth $x = x_0$, jedoch nicht für jeden Werth von x. Dann giebt es eine und nur eine endliche Zahl R, sodafs die Reihe convergirt, und zwar absolut, für alle Werthe von x, absolut genommen kleiner als R; dagegen divergirt für alle Werthe von x, deren absoluter Betrag gröfser ist als R. — Das Intervall $(-R, +R)$ heifst das Convergenzintervall der Potenzreihe. Über das Verhalten der Reihe an seinen Grenzen $x = \pm R$ läfst sic im Allgemeinen nichts sagen.

Definirt man nämlich eine positive Veränderliche X' durch die Bedingung, dafs die Reihe (1) convergent sei für alle Werthe $|x| < X'$, so ist X_0 ein Werth derselben. Sie mufs eine endliche obere Grenze $R \geq X_0$ haben. Ist $X < R$, so giebt es Werthe von X' so, dafs $X < X' \leqq R$, also convergirt die Reihe (1) für jeden Werth, dessen absoluter Betrag $< R$. Und ist X ein Werth, dessen absoluter Betrag $> R$, so mufs die Reihe dafür divergiren; denn wäre sie convergent, so würde sie auch convergiren für jeden Werth zwischen R und X, also könnte R unmöglich obere Grenze von X' sein.

Die genannten drei Classen lassen sich schon nachweisen, wenn man nur solche Potenzreihen betrachtet, wofür $\lim (A_{n+1} : A_n)$ bei $\lim n = +\infty$ existirt. „Je nachdem dieser Grenzwerth $+\infty$, Null oder eine positive Zahl λ ist, gehört die Reihe zur 1., 2. oder 3. Classe.“ — Was immer auch X sein mag, wenn es nur positiv ist, man hat im ersten Falle

$$\lim_{n=+\infty} \frac{A_{n+1} X^{n+1}}{A_n X^n} = +\infty;$$

somit auch $\lim A_n X^n = +\infty$ für $\lim n = +\infty$; die Reihe (1) divergirt demnach. Im zweiten Falle ist dagegen

$$\lim_{n=+\infty} \frac{A_{n+1} X^{n+1}}{A_n X^n} = 0,$$

so dafs die Reihe (2) und somit auch (1) convergirt. Im dritten Falle ist $R = \frac{1}{\lambda}$, indem

$$\lim_{n=+\infty} \frac{A_{n+1} X^{n+1}}{A_n X^n} = \lambda X,$$

so dafs (2) und (1) convergiren, wenn $X < \frac{1}{\lambda}$; dagegen divergiren, wenn $X > \frac{1}{\lambda}\cdot$ (Vgl. Nr. 4.)

Ein Beispiel der ersten Classe bietet mithin die Reihe

$$1 + \sum_1^\infty{}^n n!\, x^n;$$

ein solches der zweiten Classe die Reihe

$$1 + \sum_1^\infty{}^n \frac{x^n}{n!}\cdot$$

Potenzreihen, wofür $R = +1$, sind aufser der geometrischen Reihe $1 + x + x^2 + \cdots$ z. B. die folgenden:

$$\sum_1^\infty{}^n \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, \quad \sum_1^\infty{}^n \frac{x^n}{n^\alpha}\,(\alpha > 1), \quad \sum_0^\infty{}^k (-1)^k \frac{x^{2k}}{2k+1}\cdot$$

Während die geometrische Reihe an den Grenzen des Convergenzintervalles $(-1, +1)$, d. i. für $x = \pm 1$ divergirt, convergirt die zweite für $x = +1$ und divergirt für $x = -1$; die dritte und vierte convergiren für $x = \pm 1$, und zwar die eine absolut, die andere nicht.

23. **Satz** nach Abel:[32]) Convergirt die Potenzreihe

$$\sum_0^\infty{}^n a_n x^n \tag{1}$$

für den von Null verschiedenen Werth $x = r$, so convergirt sie gleichmäfsig für alle Werthe von x im

Intervalle (r', r) mit Einschlufs der Grenzen, worin r' irgend einen Werth von entgegengesetzten Zeichen wie r bedeutet, jedoch absolut genommen kleiner als r.

Beweis. Setzt man

$$a_{n+1}r^{n+1} + a_{n+2}r^{n+2} + \cdots + a_{n+p}r^{n+p} = \varrho_{n,p},$$

so gehört nach Voraussetzung zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\mu > 0$, so dafs $|\varrho_{n,p}| < \varepsilon$, wenn $n > \mu$. — Es ist nun

$$a_{n+1}r^{n+1} = \varrho_{n,1},\ a_{n+2}r^{n+2} = \varrho_{n,2} - \varrho_{n,1} \cdots$$
$$\cdots a_{n+p}r^{n+p} = \varrho_{n,p} - \varrho_{n,p-1};$$

somit nach Nr. 3, 4

$$\sum_1^\infty {}_p\, a_{n+p}x^{n+p} = \varrho_{n,1}\left(\frac{x}{r}\right)^{n+1} + \sum_2^\infty {}_p (\varrho_{n,p} - \varrho_{n,p-1})\left(\frac{x}{r}\right)^{n+p}$$

$$= \sum_1^\infty {}_p\, \varrho_{n,p}\left(1 - \frac{x}{r}\right)\left(\frac{x}{r}\right)^{n+p}.$$

Demnach folgt, wenn $-1 < \frac{r'}{r} \leqq \frac{x}{r} < 1$ und $n > \mu$,

$$\left|\sum_1^\infty {}_p\, a_{n+p}x^{n+p}\right| < \varepsilon\left(1 - \frac{x}{r}\right)\sum_1^\infty {}_p \left|\frac{x}{r}\right|^{n+p}$$

$$= \varepsilon\left(1 - \frac{x}{r}\right)\left|\frac{x}{r}\right|^{n+1} : \left(1 - \left|\frac{x}{r}\right|\right).$$

Wenn $\frac{x}{r} \geqq 0$, so ist das letzte Glied $< \varepsilon$; wenn $\frac{x}{r} < 0$, so $< \frac{r - r'}{r + r'} = \alpha$.

Es ergiebt sich somit, dafs für alle x, welche der Relation $\frac{r'}{r} \leqq \frac{x}{r} \leqq 1$ genügen,

$$|a_{n+1}x^{n+1} + \cdots + a_{n+p}x^{n+p}| < \alpha\varepsilon,$$

wenn nur $n > \mu$.

Wir schliefsen aus dem vorstehenden Satze, dafs die Summe der Potenzreihe (1) — $f(x)$ — eine stetige Function von x ist für alle Werthe von x im Intervalle (r', r), die Grenzen $x = r'$ und $x = r$ eingeschlossen. — Insbesondere folgt der Satz: „Ist die Potenzreihe

$$a_m x^m + a_{m+1} x^{m+1} + \cdots \quad (m \geqq 1)$$

in einem Intervalle $(-R, +R)$ convergent, so hat man

$$\lim_{x=0} (a_m x^m + a_{m+1} x^{m+1} + \cdots) = 0.\text{“}$$

Dasselbe ergiebt sich aus der Relation

$$|a_m x^m + a_{m+1} x^{m+1} + \cdots| \leqq g \left(\frac{X}{X_0}\right)^m : \left\{1 - \frac{X}{X_0}\right\},$$

worin X_0 einen positiven Werth $< R$ bedeutet und g eine Zahl, nicht kleiner als $A_n X_0^n$ $(n = m, m+1 \ldots)$.

Aus dem obigen Satze folgt auch der in der Anmerkung zu Nr. 11 erwähnte Satz von Abel über die Multiplication zweier Reihen. Convergiren Σa_n, Σb_n, Σd_n, so convergiren die Potenzreihen

$$\sum a_n x^n = f(x), \qquad \sum b_n x^n = g(x), \qquad \sum d_n x^n = h(x)$$

absolut für alle Werthe von x, deren absoluter Betrag kleiner als l ist. Dafür ist also (Nr. 10)

$$h(x) = f(x) \cdot g(x).$$

Daraus ergiebt sich aber, da bei $\lim x = 1 - 0$

$$\lim f(x) = a, \ \lim g(x) = b \text{ und } \lim h(x) = \Sigma d_n, \ \Sigma d_n = ab.$$

Nehmen wir jetzt an, es sei die Reihe (1) für $x = r$ divergent, dagegen convergent für alle Werthe x, deren absoluter Betrag kleiner ist als $|r| = R$. Dann können wir sofort bemerken, dafs diese Convergenz unmöglich für alle Werthe von x im Intervalle $(r' r)$ mit Ausschlufs der Grenze $x = r$ gleichmäfsig sein kann. Denn wäre das der Fall, so müfste (1) auch für $x = r$ convergiren (Nr. 21).

Weiter wollen wir noch die folgenden Sätze beweisen:

1) „Es sei

$$a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \cdots + a_n r^n = \sigma_n$$

und $r > 0$, was man stets annehmen darf. Ist

$$\lim_{n=+\infty} \sigma_n = +\infty \quad (-\infty),$$

so hat auch

$$f(x) = \sum_0^\infty {}_n\, a_n x^n$$

bei $\lim x = r - 0$ den Grenzwerth $+\infty$ $(-\infty)$."

2) „Ist die obere (untere) Unbestimmtheitsgrenze von σ_n bei $\lim n = +\infty$ eine endliche Zahl $O\,(U)$, so ist die von $f(x)$ (wenn nicht $-\infty$ $(+\infty)$) eine Zahl, welche nicht gröfser (kleiner) als O (U) ist."[33])

Die Sätze beruhen auf der folgenden Formel. Es sei $x < r$ und

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = s_n(x).$$

Ist n gröfer als eine feste ganze Zahl m, so folgt wegen $a_n r^n = \sigma_n - \sigma_{n-1}$

$$\begin{aligned} s_n(x) &= s_m(x) + \sum_{m+1}^{n} {}_p\, (\sigma_r - \sigma_{r-1}) \left(\frac{x}{r}\right)^p \\ &= \left[s_m(x) - \sigma_m \left(\frac{x}{r}\right)^{m+1}\right] + \left(1 - \frac{x}{r}\right) \sum_{m+1}^{n-1} {}_p\, \sigma_p \left(\frac{x}{r}\right)^p + \sigma_n \left(\frac{x}{r}\right)^n. \end{aligned} \tag{3}$$

Wenn $\lim \sigma_n = +\infty$ bei $\lim n = +\infty$, so kann m so gewählt werden, dafs für $n > m$ $\sigma_n > G$, wobei G irgend eine positive Zahl bedeutet. Demnach ist nach (3)

$$\begin{aligned} s_n(x) > &\left[s_m(x) - \sigma_m \left(\frac{x}{r}\right)^{m+1}\right] \\ &+ G \left[\left(1 - \frac{x}{r}\right) \sum_{m+1}^{n-1} {}_p \left(\frac{x}{r}\right)^p + \left(\frac{x}{r}\right)^n\right], \end{aligned}$$

d. h.

$$s_n(x) > \left[s_m(x) - \sigma_m \left(\frac{x}{r}\right)^{m+1}\right] + G \left(\frac{x}{r}\right)^{m+1}$$

und

$$f(x) \geq \left[s_m(x) - \sigma_m \left(\frac{x}{r}\right)^{m+1}\right] + G \left(\frac{x}{r}\right)^{m+1}.$$

Da bei $\lim x = r - 0$

$$\lim \left[s_m(x) - \sigma_m \left(\frac{x}{r}\right)^{m+1}\right] = 0 \quad \lim \left(\frac{x}{r}\right)^{m+1} = 1,$$

so gehört zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta > 0$, so daſs wenn nur $r - \delta < x < r$

$$+\varepsilon > s_m(x) - \sigma_m\left(\frac{x}{r}\right)^{m+1} > -\varepsilon, \quad 1 > \left(\frac{x}{r}\right)^{m+1} > 1 - \varepsilon.$$

Man findet also

$$r - \delta < x < r \qquad f(x) > G\,(1 - \varepsilon) - \varepsilon = G - \varepsilon\,(G + 1).$$

Wenn nun H eine gegebene positive Zahl bedeutet, so nehme man $G > H$ an, wodurch m bestimmt ist und setze

$$\varepsilon = (G - H) : (G + 1),$$

worauf δ sich ergiebt. Dann folgt für alle $r - \delta < x < r$ $f(x) > H$ d. i.

$$\lim_{x = r - 0} f(x) = +\infty.$$

Hat bei $\lim n = +\infty$ σ_n die endliche obere Unbestimmtheitsgrenze O, so kann m so gewählt werden, daſs für $n > m$ $\sigma_n < O + \varepsilon$, wo ε irgend eine positive Zahl sein kann. Demnach folgt aus (3) auf die soeben gezeigte Art

$$n > m \quad s_n(x) < \left[s_m(x) - \sigma_m\left(\frac{x}{r}\right)^{m+1}\right] + (O + \varepsilon)\left(\frac{x}{r}\right)^{m+1}$$

und

$$f(x) \leq \left[s_m(x) - \sigma_m\left(\frac{x}{r}\right)^{m+1}\right] + (O + \varepsilon)\left(\frac{x}{r}\right)^{m+1}.$$

Und daraus ergiebt sich für $r - \delta < x < r$, wenn $O \geqq 0$,

$$f(x) < \varepsilon + (O + \varepsilon) = O + 2\varepsilon; \tag{4}$$

wenn $O < 0$ (und $\varepsilon < -O$)

$$f(x) < \varepsilon + (O + \varepsilon)\,(1 - \varepsilon) < O + \varepsilon\,(2 - O). \tag{5}$$

Ist nun die obere Unbestimmtheitsgrenze von $f(x)$ bei

$$\lim x = r - 0$$

eine endliche Zahl O', so darf man behaupten, daſs im Intervalle $(r - \delta,\ r)$ mindestens ein Werth x_1 liegt, so daſs

$$f(x_1) > O' - \varepsilon.$$

Also hat man

$$O' - O < 3\varepsilon \text{ bez. } \varepsilon\,(3 - O),$$

und da diese Zahlen jeden positiven Werth erhalten können, so ergiebt sich $O' \leqq O$ (VII. 7).

3) „Hat σ_n bei $\lim n = +\infty$ endliche und verschiedene Unbestimmtheitsgrenzen O, U, so convergirt die Reihe

$$\sum_0^\infty{}_n\, a_n x^n \quad (1)'$$

für alle Werthe von x, deren absoluter Betrag kleiner als r ist. Bezeichnet $f(x)$ ihre Summe, so hat $f(x)$ bei $\lim x = r - 0$ endliche Unbestimmtheitsgrenzen $O'\,U'$ und es ist

$$U \leqq U' \leqq O' \leqq O.\text{“}^{34)}$$

Beweis. Da nunmehr alle σ_n dem absoluten Betrage nach unter einer endlichen Zahl g liegen, so convergirt für $|x| < r$ die Potenzreihe

$$\sigma_0 + \sigma_1\left(\frac{x}{r}\right) + \sigma_2\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \cdots + \sigma_n\left(\frac{x}{r}\right)^n + \cdots$$

(Nr. 22); somit auch die Reihe

$$\sigma_0\left(1 - \frac{x}{r}\right) + \sigma_1\left(\frac{x}{r}\right)\left(1 - \frac{x}{r}\right) + \cdots$$
$$+ \sigma_n\left(\frac{x}{r}\right)^n\left(1 - \frac{x}{r}\right) + \cdots$$

Also da $\lim \sigma_n\left(\frac{x}{r}\right)^n = 0$ bei $\lim n = +\infty$, convergirt auch die Reihe

$$\sigma_0 + (\sigma_1 - \sigma_0)\frac{x}{r} + (\sigma_2 - \sigma_1)\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \cdots,$$

welche mit (1) übereinstimmt. (Vgl. Nr. 3.)

Nach (4) bez. (5) gehört zu jeder Zahl $\varepsilon' > 0$ eine Zahl $\delta' > 0$, so dafs wenn

$$r - \delta' < x < r \qquad U - \varepsilon' < f(x) < O + \varepsilon'.$$

Daraus schliefst man, dafs die obere Unbestimmtheitsgrenze von $f(x)$ bei $\lim x = r - 0$ nicht $-\infty$, d. h. dafs nicht $\lim f(x) = -\infty$ sein kann. Ebensowenig kann die untere Unbestimmtheitsgrenze von $f(x)$ bei $\lim x = r - 0$ $+\infty$ sein. Also sind beide endliche Zahlen O', U' und man hat nach dem zweiten Satze $O' \leqq O$; $U' \geqq U$. Dafs $O' = U'$

sei, ist dabei nicht ausgeschlossen. In der That ist für die geometrische Reihe $1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$

$$r = 1, \quad O = 1, \quad U = 0, \quad O' = U' = \frac{1}{2}.$$

24. **Satz.** „Gehört zu jeder positiven Zahl δ ein von Null verschiedener Werth von x, dem absoluten Betrage nach kleiner als δ, durch den die endliche oder unendliche Potenzreihe

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots, \tag{1}$$

welche im letzteren Falle in einem Intervalle $(-R, +R)$ von x convergirt, zu Null gemacht wird, so müssen alle ihre Coefficienten Null sein:

$$a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0.\text{“}$$

Beweis. Zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ gehört eine Zahl $\delta > 0$, so dafs für alle $|x| < \delta$

$$|a_1 x + a_2 x^2 + \cdots| < \varepsilon,$$

d. i.

$$|f(x) - a_0| < \varepsilon.$$

Nun giebt es einen Werth x_1

$$0 < |x_1| < \delta,$$

so dafs

$$f(x_1) = 0.$$

Also hat man $|a_0| < \varepsilon$, d. i. $a_0 = 0$ (VII. 7).

Nunmehr ist

$$f(x) = x(a_1 + a_2 x + \cdots) = x\, f_1(x).$$

Da für alle $|x| < \delta_1$

$$|f_1(x) - a_1| < \varepsilon,$$

und ein Werth x_2

$$0 < |x_2| < \delta_1$$

existirt, so dafs

$$f(x_2) = 0$$

also auch $f_1(x_2) = 0$, so folgt $|a_1| < \varepsilon$, d. i. $a_1 = 0$.

Weiter ist

$$f(x) = x^2(a_2 + a_3 x + \cdots) = x^2 f_2(x).$$

Da für alle $|x| < \delta_2$ $|f_2(x) - a_2| < \varepsilon$ und ein Werth x_3 existirt — $0 < |x_3| < \delta_2$ —, so dafs $f(x_3) = 0$, also $f_2(x_3) = 0$, so folgt $|a_2| < \varepsilon$ d. i. $a_2 = 0$. U. s. f. Auf diese Weise gelangt man allmählich zur Gleichung $a_n = 0$, wie grofs auch n sein mag.

Corollar. „Haben die endlichen oder unendlichen Potenzreihen

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$

$$g(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n + \ldots,$$

welche jedenfalls in einem gemeinsamen Intervalle $(-R, +R)$ convergiren, die Eigenschaft, dafs zu jeder positiven Zahl δ ein von Null verschiedener Werth von x, dem absoluten Betrage nach kleiner als δ, gehört, wofür die Gleichung $f(x) = g(x)$ besteht; so müssen die gleichstelligen Coefficienten in beiden Reihen übereinstimmen d. i.

$$a_0 = b_0, \quad a_1 = b_1 \ldots a_n = b_n \ldots \text{“}$$

Denn es hat die Potenzreihe

$$f(x) - g(x) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + \ldots + (a_n - b_n)x^n + \ldots$$

die im vorstehenden Satze verlangte Beschaffenheit, so dafs man schliefsen mufs $a_0 - b_0 = 0$, $a_1 - b_1 = 0$ und überhaupt $a_n - b_n = 0$.

25. Häufig kommt die folgende Frage vor. Es seien gegeben eine im Intervalle $(-S, +S)$ convergente Potenzreihe nach y

$$\varphi(y) = b_0 + b_1 y + b_2 y^2 + \ldots \qquad (1)$$

und eine endliche oder unendliche Potenzreihe nach x

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots, \qquad (2)$$

im letzteren Falle convergent innerhalb des Intervalles $(-R, +R)$. Giebt es zwischen $-R$ und $+R$ Werthe von x, wofür $|f(x)|$ kleiner als S ist, so convergirt die unendliche Reihe

$$\varphi\{f(x)\} = b_0 + b_1 f(x) + b_2 f(x)^2 + \ldots$$

Nach der Multiplicationsregel in Nr. 10 kann man, wenn $|x| < R$, die Potenzen $f(x)$, $f(x)^2, \ldots$ entwickeln und zwar erhält man dafür unmittelbar nach Potenzen von x fortschreitende, absolut convergente Reihen:

$$f(x)^m = a_{m,0} + a_{m,1}x + a_{m,2}x^2 + \dots + a_{m,n}x^n + \dots \quad (3)$$
$$(m = 2, 3 \dots).$$

Zur successiven Bildung der Coefficienten $a_{m,n}$ kann man sich auch des binomischen Satzes (VIII. 3) bedienen. Nun entsteht die Frage, ob man die auf diese Art erhaltene zweifach unendliche Reihe nach Potenzen von x ordnen darf. Darauf hat Cauchy durch den folgenden Satz geantwortet.[35])

„Es seien gegeben die Reihe (1) nach Potenzen von y, convergent im Intervalle $-S < y < S$ und die endliche oder unendliche Reihe (2) nach Potenzen von x, im letzteren Falle convergent für alle $-R < x < +R$. — Giebt es positive Werthe von X, kleiner als R, wofür die Summe der unendlichen Reihe

$$\Phi(X) = A_0 + A_1 X + A_2 X^2 + \dots,$$

worin A_n den absoluten Betrag von a_n bezeichnet, kleiner als S ist; so convergiren absolut sämmtliche Reihen

$$b_1 a_n + b_2 a_{2,n} + b_3 a_{3,n} + \dots + b_m a_{m,n} + \dots \quad (4)$$
$$(n = 0, 1, 2 \dots),$$

deren Summen somit die Zahlen $c_0, c_1 \dots c_n \dots$ sein mögen. Und es läſst sich eine positive Zahl $K < R$ angeben, so daſs für alle $|x| < K$ die unendliche Reihe

$$(b_0 + c_0) + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + \dots \quad (5)$$

convergirt und ihre Summe gleich ist $\varphi\{f(x)\}$."

„Die vorstehende Bedingung verlangt, daſs $A_0 < S$; dann kann man für K jede Zahl nehmen, wofür

$$\Phi(K) < S."$$

Beweis. Nach dem 3. Satze in Nr. 11 hat man die Glieder in den unendlichen Reihen $b_1 f(x)$, $b_2 f(x)^2 \dots$ durch ihre absoluten Beträge zu ersetzen und nachzusehen, ob die so erhaltenen Reihen convergiren, sowie auch die aus ihren Summen gebildete Reihe. Das erstere ist unmittelbar ersichtlich, da für alle Werthe $|x| < R$ die Reihe (2), somit auch die Reihen (3) absolut convergiren. Setzt man nun

$$|x| = X, \qquad |b_m| = B_m$$

und

$$|a_{m,0}| + |a_{m,1}| X + |a_{m,2}| X^2 + \ldots l = \Phi_m(X) \quad (m = 2, 3 \ldots);$$

so handelt es sich noch um das Verhalten der Reihe

$$B_0 + B_1 \Phi(X) + B_2 \Phi_2(X) + \ldots + B_m \Phi_m(X) + \ldots \quad (6)$$

Sie convergirt in der That, wenn $\Phi(X) < S$, wie der folgende Schlufs lehrt. Bildet man

$$\Phi(X)^m = C_{m,0} + C_{m,1} X + \ldots + C_{m,n} X^n + \ldots;$$

so erkennt man sofort, dafs

$$|a_{m,n}| \leqq C_{m,n}.$$

$a_{m,n}$ ist nämlich eine ganze, ganzzahlige Function der $a_0, a_1 \ldots$ und $A_{m,n}$ genau derselbe Ausdruck in den $A_0 A_1 \ldots$ Somit hat man

$$\Phi_m(X) \leq \Phi(X)^m$$

und da die Reihe $\Sigma B_m \Phi(X)^m$ convergirt, wenn $\Phi(X) < S$, so gilt dasselbe von (6). — Man schliefst nun nach dem erwähnten Satze, dafs die Reihen (4) absolut convergiren und dafs für die Werthe von x, wofür $\Phi(X) < S$

$$(b_0 + c_0) + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots = \varphi\{f(x)\}. \quad (7)$$

Ist $A_0 < S$, so kann man positive Zahlen $K < R$ bestimmen, so dafs für $X < K$ $\Phi(X) < S$. Während X die Werthe $0 \leqq X < R$ durchläuft, wächst $\Phi(X)$ beständig vom Werthe A_0 an, hat also eine endliche obere Grenze $G > A_0$ oder die obere Grenze $+\infty$. Im letzteren Falle und wenn $G \geq S$, so bestimme man K so, dafs $\Phi(K) = T$, wo T eine beliebige Zahl zwischen A_0 und S sein kann; ist aber $G < S$, so lasse man T eine beliebige Zahl zwischen A_0 und G sein.

NB. Es ist hervorzuheben, dafs man auf dem angegebenen Wege in der Regel das wahre Convergenzintervall der Potenzreihe (5) nicht finden wird und dafs, selbst wenn dasselbe auf einem anderen Wege bekannt geworden wäre, der obige Satz durchaus nicht zum Schlusse berechtigt, dafs die Gleichung (7) auch für Werthe von x, deren absoluter Betrag gröfser als K ist, bestehe. — Durch Heranziehung complexer Werthe von x hat Weierstrafs gezeigt, dafs wenn es zwischen $-R$ und $+R$ Werthe von x giebt, wofür $|f(x)| < S$ ist, auch in dem Falle, dafs nicht etwa diejenigen Coefficienten von $f(x)$, welche nicht Null sind, das nämliche Zeichen haben, eine positive Zahl $A < R$ existirt, so dafs Gl. (7) besteht für alle x, deren absoluter Betrag kleiner als A ist. — Also darf man nicht glauben, dafs wenn $A_0 > S$, die Entwickelung von $\varphi\{f(x)\}$ nach Potenzen von x unmöglich sei. Setzt man z. B. in die im Intervalle $(-1, +1)$ convergente geometrische Reihe

$$\frac{1}{1+y^2} = 1 - y^2 + y^3 - \dots$$

$y = (a-x) : b$, worin $A = |a| > |b|$; so läfst sich gleichwohl die rationale Function

$$\frac{b^2}{b^2 + (a-x)^2} = \frac{b^2}{a^2+b^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2ax - x^2}{a^2+b^2}}$$

sicher nach Potenzen von x entwickeln, wenn

$$2AX + X^2 < a^2 + b^2$$

d. i.

$$X + A < \sqrt{2a^2 + b^2}.$$

Wir werden sehen, dafs das sogar angeht, so lange X kleiner als $\sqrt{a^2+b^2}$ verbleibt.

In zwei Fällen ist die Forderung $A_0 < S$ unmittelbar erfüllt; erstens wenn $a_0 = 0$, d. i. $f(x)$ mit dem Gliede $a_k x^k$ $(k > 1)$ beginnt, zweitens wenn die Reihe (1) beständig convergirt. Im letzteren Falle convergirt die Reihe (5) mindestens für alle Werthe $|x| < R$ und für jeden derselben gilt auch die Gleichung (7).[36]) — Denn ist

$$|x'| = X' < R,$$

so nehme man eine Zahl R' zwischen X' und R an; wegen der beständigen Convergenz von (1) kann man sich $S > \Phi(R')$ denken.

Beispiele. Eines ist oben Nr. 19 erwähnt, wobei $x = 1 : n$ gesetzt ist. — Ein anderes bietet die Aufgabe dar, eine Reihe (2) nach Potenzen von x mit dem Convergenzintervalle $(-R, +R)$, nachdem darin $x = x_0 + h$ gesetzt ist, nach Potenzen von h zu ordnen. Das ist jedenfalls zulässig, wenn

$$|x_0| < R$$

und

$$|x_0| + |h| < R,$$

also
$$|h| < R - |x_0|.$$
Denn nunmehr treten an Stelle der Functionen $f(x)$, $\Phi(X)$ im vorstehenden Satze bez. $x_0 + h$, $|x_0| + |h|$. Unter den genannten Bedingungen hat man also

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \dots$$
$$+ \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \dots \tag{7}$$

worin

$$f^{(n)}(x_0) = \sum_n^\infty {}^m\, m(m-1)\dots(m-n+1)\, a_m x_0^{m-n} \tag{8}$$
$$(n = 1, 2 \dots),$$

d. h. die Reihen (8) convergiren, die Reihe (7) sicher, wenn $|h| < R - |x_0|$ und sie hat die Summe $f(x_0 + h)$. Es ist jedoch möglich, dafs sie auch für Werthe convergirt, die gröfser als $R - |x_0|$ sind. Z. B.: Die geometrische Reihe
$$1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$
convergirt im Intervalle $(-1, +1)$. Setzt man darin
$$x = x_0 + h \quad 0 < x_0 < 1,$$
so wird man dieselbe Reihe nach Potenzen von h erhalten, wie aus der Entwickelung des Bruches
$$1 : (1 + x_0 + h),$$
d. i.
$$\frac{1}{1 + x_0 + h} = \frac{1}{1 + x_0} \cdot \frac{1}{1 + \frac{h}{1 + x_0}} = \frac{1}{1 + x_0} - \frac{h}{(1 + x_0)^2}$$
$$+ \frac{h^2}{(1 + x_0)^3} - \dots$$
Sie convergirt, so lange $|h| < 1 + x_0$, also auch für Werthe $> 1 - x_0$.

Wie erwähnt, convergiren die nach Potenzen von x_0 fortschreitenden Reihen (8) absolut für alle Werthe $|x_0| < R$. Man kann hinzufügen, dafs jede dieser Reihen genau dasselbe Convergenzintervall besitzt, wie die Reihe

(2). — Ist die Reihe (2) beständig convergent, so folgt der Satz schon aus der vorstehenden Bemerkung. Wenn die Reihe (2) nur in dem endlichen Intervalle $(-R, +R)$ convergirt, so hat man $R < R'$, unter $(-R', +R')$ das wahre Convergenzintervall der Reihe

$$f'(x_0) = \sum_1^\infty {}^m\, m a_m x_0^{m-1} \tag{9}$$

verstanden. Nun folgt aber aus der absoluten Convergenz von (9) nach Nr. 4 die absolute Convergenz der Reihe

$$\sum {}^m\, a_m x_0^{m-1},$$

also die von

$$\sum {}^m\, a_m x_0^m; \tag{10}$$

somit ergiebt sich weiter $R > R'$. Aus beiden Relationen zusammen wird man schliefsen $R = R'$. — Die Reihe

$$f''(x_0) = \sum_2^\infty {}^m\, m(m-1)\, a_m x_0^{m-2} \tag{11}$$

steht in derselben Beziehung zu (9), wie diese selbst zu (10), d. h. setzt man in (10) statt a_m durchaus $(m+1)\, a_{m+1}$, so geht $f'(x_0)$ in $f''(x_0)$ über. Also convergirt auch (11) genau im Intervalle $(-R, +R)$. U. s. f.

Die Functionen $f'(x_0)$, $f''(x_0) \ldots$ heifsen nach Lagrange die erste, zweite ... Ableitung der Function $f(x)$, welche als Summe der Potenzreihe (2) definirt ist, und werden auch mit $D_x f(x)$, $D_x^2 f(x) \ldots$ bezeichnet.

26. Als drittes Beispiel zum Satze der vorigen Nummer möge die Entwickelung des Quotienten zweier endlichen oder unendlichen Potenzreihen von x

$$f(x) = \sum_0^\infty {}^n\, a_n x^n \qquad g(x) = \sum_0^\infty {}^n\, b_n x^n$$

in eine Reihe nach Potenzen von x dienen. Dabei ist anzunehmen, dafs der Nenner $g(x)$ für $x = 0$ d. i. b_0 nicht Null ist. Demnach kann man

$$g(x) = b_0(1 + y), \qquad y = \sum_1^\infty{}_n \frac{b_n x^n}{b_0}$$

setzen, woraus sich zunächst ergiebt, dafs der Bruch

$$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{b_0}(1 - y + y^2 - \ldots),$$

für hinlänglich kleine Werthe von x in eine Reihe nach Potenzen von x entwickelt werden könne. Man findet

$$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{b_0} + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots \tag{12}$$

mindestens für alle Werthe $|x| < K$, wo K aus der Relation

$$\frac{B_1 K}{B_0} + \frac{B_2 K^2}{B_0} + \ldots < 1, \qquad |b_n| = B_n,$$

zu entnehmen ist. Denkt man sich K auch so klein, dafs es **innerhalb** des Convergenzintervalles der Reihe $f(x)$ fällt, so erhält man durch Multiplication dieser Reihe mit (12) die gesuchte Entwickelung

$$\frac{f(x)}{g(x)} = d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + \ldots \tag{13}$$

Die Coefficienten d_n wird man leichter recurrirend aus den folgenden Formeln berechnen. Aus (13) ergiebt sich, dafs für alle $|x| < K$

$$f(x) = g(x) \cdot \{ d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + \ldots \}. \tag{14}$$

Daher stimmen nach einem Satze in Nr. 24 die Coefficienten derselben Potenzen von x auf beiden Seiten der Gleichung überein. Man findet demnach

$$\begin{aligned} a_0 &= b_0 d_0 \\ a_1 &= b_1 d_0 + b_0 d_1 \\ &\ldots\ldots\ldots \\ a_n &= b_n d_0 + b_{n-1} d_1 + \ldots + b_0 d_n \end{aligned} \tag{15}$$

d. i. ein System von Gleichungen, aus welchen man nacheinander die Zahlen $d_0, d_1, \ldots d_n \ldots$ berechnen kann, indem b_0 von Null verschieden ist.

Die Giltigkeit der Gleichung (13) ist in der Regel nicht auf das Intervall $-K < x < +K$ beschränkt, sie reicht vielmehr soweit, als beide Reihen $g(x)$ und

$$d_0 + d_1 x + d_2 x^2 \ldots$$

absolut convergiren. Das folgt unmittelbar daraus, dafs beide Seiten der Gleichung (14) identisch sind. Es kommt somit darauf an, das Convergenzintervall der Reihe

$$d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + \ldots$$

zu bestimmen, was diejenigen Fälle, wo es sich aus den Coefficienten d_n ermitteln läfst, ausgenommen, erst die Theorie der Functionen complexer Veränderlichen zu leisten vermag. Man wird indefs bemerken, dafs die Reihe $d_0 + d_1 x + \ldots$ für einen Werth $x = x_0$ nicht mehr convergiren kann, wofür $g(x_0) = 0$, während $f(x_0)$ von Null verschieden ist. Denn es ist nun

$$\lim \{f(x) : g(x)\} = \pm \infty \quad \text{bei} \quad \lim x = x_0 \pm \overset{*}{0},$$

während, wenn die genannte Reihe für $x = x_0$ convergiren würde, dieser Grenzwerth endlich sein müfste (Nr. 23).

Wenn $f(x)$ und $g(x)$ ganze Functionen von x bedeuten, so kann die Aufgabe mit Hülfe der Partialbruchzerlegung der rationalen Function $f(x) : g(x)$ auf reellem Wege zu Ende geführt werden. Dabei handelt es sich hauptsächlich um den Nachweis, dafs der Bruch $1 : [(x-a)^2 + b^2]$, worin b nicht Null ist, eine Reihe liefert, welche für alle Werthe $|x| < \sqrt{a^2 + b^2}$ convergirt. Wir werden später sehen, dafs man ihn durch eine trigonometrische Umformung der Coefficienten dieser Reihe erbringen kann.

Lassen wir $f(x)$, $g(x)$ in x bez. vom Grade p, q sein, so gehen die Gleichungen (15), wenn $n > p$, in folgende über

$$0 = b_n d_0 + b_{n-1} d_1 + \ldots + b_0 d_n. \tag{16}$$

Und wenn n auch $> q$, so hat man fortan

$$0 = b_q d_{n-q} + b_{q-1} d_{n-q+1} + \ldots + b_0 d_n. \tag{17}$$

Aus diesem Grunde nennt man jetzt die Reihe $\Sigma d_n x^n$ recurrent.

Ist umgekehrt eine Potenzreihe $\Sigma d_n x^n$ vorgelegt, deren

Coefficienten für alle Werthe $n \geq m$ den Relationen (17), bez. falls $m < q$, für die Werthe $m \leq n < q$ den Relationen (16) genügen; so giebt es eine rationale Function von x, deren Entwickelung nach Potenzen von x die vorgelegte Reihe bildet. Man kann daraus entnehmen, daſs zu jeder recurrirenden Potenzreihe ein endliches, nicht verschwindendes Convergenzintervall gehört.

Die genannte rationale Function hat den Nenner

$$g(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_q x^q$$

und als Zähler eine ganze Function in x vom Grade $m - 1$

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{m-1} x^{m-1},$$

deren Coefficienten aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} a_0 &= b_0 d_0 \\ a_1 &= b_1 d_0 + b_0 d_1 \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m-1} &= \ldots + b_1 d_{m-2} + b_0 d_{m-1} \end{aligned} \tag{18}$$

zu bestimmen sind. — In der That genügen die Coefficienten der Entwickelung von $f(x) : g(x)$ zunächst den Gleichungen (18), so daſs für $d_0, d_1, \ldots d_{m-1}$ die bereits bekannten Werthe sich ergeben. Die weiteren Coefficienten der Reihe $d_m, d_{m+1} \ldots$ folgen aus den Gleichungen (17) bez. (16), so daſs auch sie mit den gleichstelligen Coefficienten der vorgelegten Reihe übereinstimmen.

27. Reihen nach ganzen positiven Potenzen von zwei Veränderlichen x, y.

Unter einer solchen versteht man die aus Gliedern von der Form $a_{m,n} x^m y^n$, worin die Exponenten m, n unabhängig von einander alle ganzzahligen Werthe 0, 1, 2 ... erhalten können, gebildete unendliche Reihe

$$a_{0,0} + a_{1,0} x + a_{0,1} y + a_{2,0} x^2 + a_{1,1} xy + a_{0,2} y^2 + \ldots \tag{1}$$

Sie hat nur dann eine Bedeutung, wenn sie wenigstens bei der angegebenen Ordnung der Glieder convergirt. Wenn die Reihe (1) absolut convergirt, so convergiren absolut nach Nr. 10 auch die Reihen

$$x^m(a_{m,0} + a_{m,1}y + a_{m,2}y^2 + \cdots) \qquad m = 0, 1, 2 \ldots,$$

sowie die aus ihren Summen $x^m g_m(y)$ gebildete Reihe und zwar hat diese dieselbe Summe wie (1), welche wir mit $f(x, y)$ bezeichnen. Man hat demnach

$$f(x, y) = \sum_0^\infty {}^m x^m g_m(y) \tag{2}$$

und analog, wenn man

$$a_{0,n} + a_{1,n}x + a_{2,n}x^2 + \cdots = f_n(x)$$

setzt,

$$f(x, y) = \sum_0^\infty {}^n y^n f_n(x).$$

Satz. „Liegen sämmtliche Glieder $a_{m,n}x^m y^n$ für die Werthe $x = x_0$, $y = y_0$, deren keiner Null ist, dem absoluten Betrage nach nicht über endlichen Zahl g, so convergirt und zwar absolut die Potenzreihe $\Sigma a_{m,n} x^m y^n$ für alle Werthsysteme x, y, welche der Bedingung genügen:

$$|x| < |x_0|, \quad |y| < |y_0|.\text{“}$$

Beweis. Bezeichnet man die absoluten Beträge von $a_{m,n}$, x u. s. w. mit grofsen Buchstaben $A_{m,n}$, X u s. w., so findet man

$$A_{m,n} X_0^m Y_0^n < g, \quad A_{m,n} X^m Y^n \leqq A_{m,n} \left(\frac{X}{X_0}\right)^m \left(\frac{Y}{Y_0}\right)^n.$$

Setzt man

$$X : X_0 = \alpha, \quad Y : Y_0 = \beta,$$

so ergiebt sich, dafs die absoluten Beträge der Glieder in (1) kleiner sind als die gleichstelligen in der Reihe

$$g + g\alpha + g\beta + g\alpha^2 + g\alpha\beta + g\beta^2 + \cdots.$$

Diese Reihe convergirt nach Nr. 7, wenn $\alpha < 1$ und $\beta < 1$; und zwar ist ihre Summe das Product der beiden geometrischen Reihen

$$g + g\alpha + g\alpha^2 + \cdots, \quad 1 + \beta + \beta^2 + \cdots$$

Somit convergirt, wenn $X < X_0$, $Y < Y_0$, die Reihe (1) absolut.

Zugleich ergiebt sich, dafs nun

$$|f(x, y)| \leqq g : \left(1 - \frac{X}{X_0}\right)\left(1 - \frac{Y}{Y_0}\right).$$

Aus dem vorstehenden Satze folgt, dafs wenn eine Potenzreihe nach x und y für ein System von Werthen $x = x_0$ $y = y_0$, von denen keiner Null ist, convergirt, sie in dem durch die Relationen $X < X_0$, $Y < Y_0$ definirten Gebiete von x, y absolut convergirt.

28. **Satz.** „Es seien zwei unendliche Reihen von Werthen

$$x_0, x_1, \ldots x_r, \ldots; y_0, y_1 \ldots y_s \ldots$$

gegeben, deren Glieder sämmtlich von Null verschieden und dabei den Bedingungen genügen

$$\lim_{r=+\infty} |x_r| = 0, \qquad \lim_{s=+\infty} |y_s| = 0.$$

Wenn nun eine endliche oder eine für alle Werthsysteme x, y, wofür

$$|x| < R, \qquad |y| < S,$$

absolut convergirende unendliche Potenzreihe (1) für jedes Werthsystem x_r, y_s den Werth 0 hat, so mufs sie identisch verschwinden, d. h.

$$a_{m,n} = 0, \quad \left.\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right\} = 0, 1, 2 \ldots\text{“}$$

Beweis. Setzt man in (2) $y = y_s$ und daneben nacheinander $x = x_0, x_1 \ldots$, so folgt nach Nr. 24

$$g_m(y_s) = 0 \qquad (m = 0, 1, 2 \ldots).$$

Und läfst man hier s die Werthe $0, 1, 2 \ldots$ annehmen, so findet man nach eben demselben Satze

$$a_{m,0} = 0, \quad a_{m,1} = 0 \ldots a_{m,n} = 0 \ldots$$

Corollar. „Haben die endlichen oder unendlichen Potenzreihen

$$\sum a_{m,n} x^m y^n, \qquad \sum b_{m,n} x^m y^n,$$

welche jedenfalls in einem Gebiete

$$|x| < R, \quad |y| < S$$

absolut convergiren, für jedes der soeben beschriebenen Werthsysteme $x_r y_s$ denselben Werth, so müssen die mit den nämlichen Indices versehenen Coefficienten einander gleich sein, d. i.

$$a_{m,n} = b_{m,n}, \quad \left.\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right\} = 0, 1, 2 \ldots \text{“}$$

Beweis wie beim analogen Satze in Nr. 24.

29. Analog dem Satze in Nr. 25 läfst sich die folgende Behauptung rechtfertigen: „Es seien gegeben die Reihe nach Potenzen von y, z

$$\varphi(y, z) = \sum b_{m,n} y^m z^n, \quad \left.\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right\} = 0, 1, \ldots$$

convergent für jedes Werthsystem $y\,z$, wofür

$$|y| < S, \ |z| < T$$

und die endlichen oder unendlichen Potenzreihen

$$f(x) = \sum a_n x^n, \quad g(x) = \sum b_n x^n,$$

welche für die Werthe

$$-R < x < +R$$

convergiren. Giebt es positive Werthe von X, kleiner als R, wofür die Summen der Reihen

$$\Phi(X) = \sum A_n X^n, \qquad \Psi(X) = \sum B_n X^n,$$

worin

$$A_n = |a_n|, \qquad B_n = |b_n|,$$

kleiner sind als S, bez. T; so kann man

$$\varphi\{f(x), \ g(x)\}$$

nach Potenzen von x ordnen, d. h. es werden die Coefficienten von $x^0, x^1, x^2 \ldots$ convergente Reihen mit den Summen $c_0, c_1, c_2 \ldots$ sein und eine positive Zahl $K < R$ sich angeben lassen, so dafs für alle $|x| < K$ die Reihe $c_0 + c_1 x + \cdots$ convergirt und die Gleichung besteht

$$\sum c_n x^n = \varphi\{f(x), \ g(x)\}.$$

Die vorstehende Bedingung verlangt, dafs

$$A_0 < S, \quad B_0 < T;$$

dann kann man für K jede Zahl nehmen, wofür

$$\Phi(K) < S, \quad \Psi(K) < T.\text{“}$$ [37])

Als eine Anwendung dieses Satzes erscheint die Aufgabe, die Potenzreihe (1), nachdem darin

$$x = x_0 + h, \quad y = y_0 + k$$

gesetzt sind, nach Potenzen von h, k zu entwickeln. Convergirt (1) absolut für alle Systeme $x\ y$, wofür

$$|x| < R, \qquad |y| < S,$$

so ist das jedenfalls zulässig, wenn

$$|x_0| < R, \quad |y_0| < S$$

und

$$|x_0| + |h| < R, \quad |y_0| + |k| < S.$$

Unter diesen Bedingungen hat man

$$f(x_0 + h,\ y_0 + k) = \sum_{r, s} \frac{f_{r, s}(x_0, y_0)}{r!\ s!} h^r k^s, \quad \begin{matrix} r \\ s \end{matrix} \Big\} = 0, 1, 2 \ldots, \tag{3}$$

wobei

$$f_{0, 0}(x_0, y_0) = f(x_0 y_0) \qquad 0! = 1$$

und

$$f_{r, s}(x_0, y_0) = \sum_{m, n} m(m-1) \ldots (m - r + 1)\, n(n-1) \ldots$$
$$(n - s + 1)\, a_{m, n} x_0{}^{m-r} y_0{}^{n-s} \qquad (m \geqq r, \quad n > s)$$

zu setzen sind.

30. Auflösung der Gleichungen durch Reihen.

Satz. „Wird vorgelegt die Gleichung

$$y = a_{0, 1} x + a_{2, 0} x^2 + a_{1, 1} xy + a_{0, 2} y^2 + \cdots \\ + a_{m, n} x^m y^n + \cdots, \tag{4}$$

deren rechte Seite eine endliche oder unendliche Reihe nach ganzen positiven Potenzen von xy bildet mit Coefficienten, welche, absolut genommen, sämmtlich eine gegebene Zahl g nicht überschreiten; so giebt es eine und nur eine innerhalb eines gewissen Intervalles von x convergente Potenzreihe ohne constantes Glied:

$$c_1 x + c_2 x^2 + \cdots,$$

welche für y in die Gleichung (4) gesetzt, sie identisch erfüllt, so dafs, wenn man beide Seiten nach Potenzen von x ordnet, jede Potenz den nämlichen Coefficienten bekommt."

Beweis. Zunächst bemerke man, dafs, wenn in (4) eine unendliche Reihe steht, sie nach Nr. 27 absolut convergirt für jedes Werthsystem $x\ y$, wofür

$$|x| < 1, \quad |y| < 1.$$

Setzt man in (4)

$$y = c_1 x + c_2 x^2 + \cdots \tag{5}$$

in der Voraussetzung, dafs die Reihe für alle Werthe

$$-R < x < +R$$

convergire, so kann man nach Nr. 29 die rechte Seite nach Potenzen von x ordnen. Soll nun die Reihe (5) die Gleichung (4) identisch befriedigen, so müssen die Coefficienten der nämlichen Potenzen von x auf beiden Seiten derselben übereinstimmen, also die Gleichungen bestehen:

$$\begin{aligned} c_1 &= a_{0,1} \\ c_2 &= a_{2,0} + a_{1,1} c_1 + a_{0,2} c_1^2 \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{aligned} \tag{6}$$

In der n^{ten} steht links c_n, rechts eine lineare homogene Function einiger unter den $a_{m,n}$, deren Coefficienten ganze ganzzahlige Functionen der Coefficienten $c_1, c_2 \ldots c_{n-1}$. Somit liefern die Gleichungen ein Werthsystem $c_1, c_2 \ldots c_n \ldots$, so dafs es nur eine Reihe (5) geben kann. Sind aber die für die c_n ermittelten Werthe derart, dafs die Reihe (5) nicht etwa blofs für $x = 0$ convergirt? Cauchy hat ein Verfahren gefunden,[38]) wonach man sich überzeugen kann, dafs dem in der That so ist. Wir sind nämlich im Stande, ein System positiver Zahlen $D_1, D_2 \ldots D_n \ldots$ nachzuweisen, die nicht kleiner sind als bez. $|c_1|, |c_2| \ldots |c_n| \ldots$ und dabei so beschaffen, dafs die Reihe $D_1 x + D_2 x^2 + \cdots$ (6) für alle Werthe $-K < x < +K$ convergirt. — Es springt in die Augen, dafs, wenn in den Gleichungen (6) alle $a_{m,n}$ durch die positive Zahl $g \geq |a_{m,n}|$ ersetzt werden, so dafs sie übergehen in

$$\begin{aligned} D_1 &= g \\ D_2 &= g\,(1 + D_1 + D_1^2) \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot, \end{aligned} \tag{7}$$

jedes D_n positiv und nicht kleiner als $|c_n|$ ausfällt. Wir bemerken ferner, daſs die Reihe (6) unter der Voraussetzung ihrer Convergenz in einem Intervalle $(-K, +K)$, für y in die Gleichung

$$y = gx + gx^2 + gxy + gy^2 + \cdots + gx^m y^n + \cdots,$$

d. i. nach Nr. 27

$$y = \frac{g}{(1-x)(1-y)} - g(1+y),$$

$$(g+1)y^2 - y = -\frac{gx}{1-x} \tag{8}$$

gesetzt, sie identisch erfüllt. Diese Gleichung wird wirklich nach y durch eine convergente Potenzreihe von der Form (4) aufgelöst, welche, da es nur eine solche geben kann, mit (6) übereinstimmen muſs. Denn aus (8) ergiebt sich

$$2(g+1)y = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4g(g+1)x}{1-x}},$$

und hieraus nach Nr. 25, da nach XI. 2 für $|u| < 1$

$$\sqrt{1-u} = 1 - \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 - \cdots$$

und für $|x| < 1$

$$x:(1-x) = x + x^2 + \cdots\cdots,$$

beim unteren Zeichen der Quadratwurzel

$$y = gx + g(1+g+g^2)x^2 + \cdots.$$

Und zwar convergirt die Reihe rechts, wenn

$$4g(g+1)X:(1-X) < 1,$$

d. i.

$$|x| = X < 1:(2g+1)^2.$$

Soweit convergirt sicher auch die Reihe (5).

Was seit Newton ein Grundgedanke der Analysis gewesen, nämlich, daſs eine Gleichung von der Form (4) nach y durch eine (convergente) Potenzreihe von x aufgelöst werden könne, ist jetzt endgiltig festgestellt worden. Wir wollen noch einige besondere Fälle dieses weittragenden Satzes aufführen.

1) Wenn $G(x, y)$ eine ganze Function von $x\,y$ bedeutet und $x_0\,y_0$ ein Werthsystem, so dafs $G(x_0, y_0) = 0$, und man entwickelt $G(x_0 + h, y_0 + k) = 0$ in die Form (3), so läfst sich diese Gleichung nach k durch eine convergente Potenzreihe von h auflösen, wenn der Coefficient $G_{0,1}(x_0, y_0)$ nicht Null ist.

2) Sollten die Glieder der rechten Seite von (4) bei der Substitution der Werthe $x = x_0$, $y = y_0$, von denen keiner Null ist, endlich bleiben, so braucht man nur statt $x\,y$ die neuen Veränderlichen $x = x_0 x'$, $y = y_0 y'$ einzuführen.

3) Die Umkehrung der Reihen. Die Gleichung

$$x = a_1 y + a_2 y^2 + \cdots + a_n y^n + \cdots = f(y), \tag{9}$$

worin rechts eine im Intervalle $(-S, S)$ convergente Potenzreihe von y steht, läfst sich, wenn a_1 nicht Null ist, auf die Form (4) zurückführen. Wir erhalten dann daraus für y eine convergente Reihe

$$y = \frac{x}{a_1} - \frac{a_2}{a_1{}^3}x^2 + \cdots = g(x).$$

Setzt man, unter x einen Werth innerhalb des Convergenzintervalles derselben und unter y das zugehörige $g(x)$ verstanden, in (9) statt xy bez. $x + h$, $y + k$ und entwickelt auch die rechte Seite nach Potenzen von h, so findet man sofort

$$1 = f'(y) \cdot g'(x). \tag{10}$$

31. Über die numerische Berechnung des Grenzwerthes einer convergenten Reihe. Dabei wird verlangt, einen mit Einheiten von der Ordnung 10^{-k} abschliefsenden Decimalbruch α zu finden, dessen Unterschied vom Grenzwerthe a der convergenten Reihe Σa_n dem absoluten Betrage nach unter einer halben Einheit der letzten Ordnung liegt:

$$|a - \alpha| < \frac{1}{2}\,10^{-k}.$$

Es sei

$$r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots.$$

und $|r_n| \leq R_n$, worin R_n als eine gegebene Function von n zu betrachten ist. Die Glieder a_0, a_1 . . der Reihe werden im Allgemeinen selbst unendliche Decimalbrüche sein, so dafs zunächst die folgende

Aufgabe zu lösen ist: wieviel Glieder von Σa_n sind zu berücksichtigen und auf wieviel Stellen ist jedes derselben zu berechnen, damit

$$|a - \sigma_n| < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^k},$$

unter σ_n die Summe der auf die noch aufzufindende Anzahl $(k + l)$ von Stellen abgerundeten Näherungswerthe $\alpha_0 \ldots \alpha_n$ der Glieder $a_0 \ldots a_n$ verstanden.[39]) Es soll nun sein

$$|a - \sigma_n| = |a - s_n| + |s_n - \sigma_n| < R_n + \frac{n+1}{2 \,.\, 10^{k+l}} \leqq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^k},$$

d. h.

$$R_n \leqq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^{k+l}} \left(10^l - n - 1\right).$$

Hieraus hat man durch Versuche die ganzen Zahlen n, l zu bestimmen. Ist das geschehen und σ_n auf $k + l$ Stellen berechnet, so wird σ_n unter Berücksichtigung der Correctur auf k Stellen abgerundet, wodurch man erhält

$$\sigma_n = \beta + \varrho, \qquad -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^k} < \varrho \leqq + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^k}.$$

Man kann aber aus der Relation $a - \beta = a - \sigma_n + \varrho$ nur schliefsen $|a - \beta| < 10^{-k}$, d. h. der Decimalbruch β bildet entweder den Anfang der Zahl a bis zu den Einheiten der Ordnung 10^{-k} einschliefslich oder s e i n e l e t z t e Z i f f e r i s t u m e i n e E i n h e i t h ö h e r a l s d i e g l e i c h s t e l l i g e i n a.

Um den gesuchten Näherungswerth α zu erhalten, mufs man die soeben angezeigte Rechnung zum mindesten um eine Stelle weiter führen. Wenn man von der ersten, auf diese Weise gefundenen Zahl β', welche also der Relation $|a - \beta'| < 10^{-k-1}$ genügt, die letzte Decimale wegläfst, so bleibe $\bar{\beta}$ übrig. Da nun

$$\beta' = \bar{\beta} + \frac{c_{k+1}}{10^{k+1}} \qquad (0 \leqq c_{k+1} \geqq 9)$$

$$a - \bar{\beta} = (a - \beta') + \frac{c_{k+1}}{10^{k+1}}$$

$$a - \left(\bar{\beta} + \frac{1}{10^k}\right) = (a - \beta') - \frac{10 - c_{k+1}}{10^{k+1}};$$

so wird man, je nachdem c_{k+1} einen der Werthe 0 bis 4 oder einen der Werthe 6 bis 9 annimmt, $\alpha = \bar{\beta}$ oder $\alpha = \bar{\beta} + 10^{-k}$ setzen. Im Falle $c_{k+1} = 5$ mufs die Rechnung so lange fortgesetzt werden, bis die letzte Ziffer des bezüglichen Werthes β von 5 verschieden ausfällt.

32. Im Falle einer Potenzreihe kann man in folgender Art Functionen R_n zur Schätzung des Restes

$$r_n = a_{n+1}x^{n+1} + a_{n+2}x^{n+2} + \cdots\cdots$$

aufstellen. Weiſs man, daſs die Glieder der Potenzreihe von

$$a_{n+1}x^{n+1}$$

an für einen Werth $x = \pm R$ unter einer Zahl g_n verbleiben — was stets der Fall ist, wenn die Reihe für $x = \pm R$ convergirt — so findet man nach Nr. 22, wenn $|x| = X < R$,

$$|r_n| < g_n \left(\frac{X}{R}\right)^{n+1} : \left(1 - \frac{X}{R}\right). \tag{1}$$

Nehmen die Glieder $A_n R^n$ mit wachsendem n beständig ab, so kann

$$g_n = A_{n+1} R^{n+1}$$

gesetzt werden, wodurch sich ergiebt für $X < R$

$$|r_n| < A_{n+1} X^{n+1} : \left(1 - \frac{X}{R}\right) \qquad A_n = |a_n|. \tag{2}$$

Wenn auſserdem der Quotient $A_{n+1} : A_n$ mit wachsendem n beständig abnimmt, so hat man

$$\frac{A_{n+k}}{A_{n+1}} = \frac{A_{n+k}}{A_{n+k-1}} \frac{A_{n+k-1}}{A_{n+k-2}} \cdots \frac{A_{n+2}}{A_{n+1}} < \left(\frac{A_{n+2}}{A_{n+1}}\right)^{k-1},$$

und damit, wenn $X < R$,

$$\begin{aligned} |r_n| &< A_{n+1} X^{n+1} \left\{1 + \frac{A_{n+2}}{A_{n+1}} X + \left(\frac{A_{n+2}}{A_{n+1}} X\right)^2 + \cdots\right\} \\ &= A_{n+1} X^{n+1} : \left(1 - \frac{A_{n+2}}{A_{n+1}} X\right). \end{aligned} \tag{3}$$

Denn es ist wegen $A_{n+1} R^{n+1} < A_n R^n$

$$A_{n+1} R < A_n,$$

also

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} X < \frac{X}{R} < 1.$$

Wenn die Coefficienten der Potenzreihe sämmtlich gleichbezeichnet, z B. positiv und die Reihe für den positiven Werth $X = R$ convergirt, so daſs

$$\sum a_n R^n = b;$$

so findet man, falls $X < R$,

$$|r_n| < \left(\frac{X}{R}\right)^{n+1} \sum_1^{\infty}{}_s\, a_{n+s} R^{n+s},$$

d. i.

$$|r_n| < \left(\frac{X}{R}\right)^{n+1} \cdot \left\{b - \sum_0^n{}_r\, a_r R^r\right\}. \tag{4}$$

Wenn die Zeichen der geltenden Glieder von

$$\sum a_n x^n$$

alterniren und dabei die Glieder dem absoluten Betrage nach beständig und unter jede Zahl sinken, so wendet man den Satz von Nr. 8 an.

XI. Abschnitt.

Die Potenzreihen für die Expontialfunction, die Potenz und den Logarithmus.

1. Mit Benutzung des im IX. Abschnitte entwickelten Begriffes einer stetigen Function können wir die Erörterungen in VIII. 6—8 auch als Lösung der von Cauchy[1]) formulirten Aufgabe hinstellen: „Eine eindeutige, zwischen beliebigen Grenzen der Veränderlichen x stetige Function derselben zu finden, welche für alle Werthe von $x\, y$ die Gleichung

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y) \tag{1}$$

befriedigt. Aufserdem soll $f(1)$ eine gegebene positive Zahl a sein.“ Die gesuchte Function kann nämlich keine andere sein als die Potenz

$$f(x) = \left[f(1)\right]^x = a^x.$$

Versuchen wir nun, ob sich die Exponentialfunction $f(x)$ nicht durch eine innerhalb eines endlichen von Null verschiedenen Intervalles convergente Potenzreihe darstellen lasse.[2]) Unter Voraussetzung, dafs

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots,$$

folgern wir aus (1) nach X. 28, dafs die Coefficienten von $x^m y^n$ auf beiden Seiten dieser Gleichung übereinstimmen müssen, d. i.

$$a_m a_n = \binom{m+n}{m} a_{m+n}, \quad \left.\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right\} = 0,\ 1,\ 2 \ldots \tag{2}$$

Aus $a_0{}^2 = a_0$ mufs man schliefsen $a_0 = 1$, da die Annahme $a_0 = 0$ auch $a_m = 0$ d. i. $f(x) = 0$ nach sich ziehen würde. Man findet ferner für $m = 1$, $n = 1, 2 \ldots$

$$a_1^2 = 2a_2, \quad a_1 a_2 = 3a_3, \; \ldots \; a_1 a_{n-1} = n a_n,$$

somit durch Multiplication dieser Gleichungen, da keine der Zahlen a_1, $a_2 \ldots$ Null sein kann,

$$a_n = \frac{a_1^n}{n!}.$$

Dieser Ausdruck genügt in der That der Relation (2) wegen

$$\binom{m+n}{m} = \frac{(m+n)!}{m!\, n!}.$$

Wir sehen demnach, dafs

$$f(x) = 1 + a_1 x + \frac{(a_1 x)^2}{2!} + \cdots\cdots\cdots \tag{3}$$

sein mufs. Das ist in der That eine Potenzreihe, welche nicht etwa blofs für $x = 0$ convergirt, ja sogar eine beständig convergente (X. 22). Man überzeugt sich auch sofort, dafs sie wirklich die Gleichung (1) befriedigt.

Die Summe der unendlichen Reihe (3), welche die willkürliche Constante a_1 enthält, ist eine eindeutige und stetige Function von x für jeden endlichen Werth von x. Sie mufs daher mit a^x übereinstimmen, wenn

$$f(1) = a = 1 + a_1 + \frac{a_1^2}{2!} + \cdots\cdot$$

ist. Setzt man zunächst $a_1 = 1$, so ergiebt sich nach VII. 5

$$f(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = e$$

(Basis der natürlichen Logarithmen) und somit

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots\cdot \tag{4}$$

Unter „Exponentialfunction“ versteht man häufig die specielle Function e^x, die auch die „natürliche Potenz“ heifst.

Für die allgemeinere Function a^x ist

$$a = f(1) = e^{a_1},$$

d. i.

$$a_1 = la,$$

also

$$a^x = e^{x\,la} = 1 + x\,la + \frac{(x\,la)^2}{2!} + \cdots + \frac{(x\,la)^n}{n!} + \cdots\cdot \tag{5}$$

Die Gleichungen (4) und (5) gelten für jeden endlichen Werth von x, so dafs eine vollständige analytische Darstellung der Functionen e^x, a^x erlangt worden ist.

2. Die Binomialreihe. Der Eingangs der vorigen Nr. erwähnte Satz führt auch zur Lösung der Aufgabe: „den Grenzwerth der Potenzreihe

$$\mu_0 + \mu_1 x + \mu_2 x^2 + \cdots + \mu_n x^n + \cdots\cdots, \tag{6}$$

worin

$$\mu_0 = 1, \qquad \mu_n = \frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)}{1 \,.\, 2 \ldots n},$$

zu bestimmen im Falle, dafs sie convergirt."

Wenn μ eine natürliche Zahl oder 0 ist, so reducirt sich die Reihe (6) auf eine endliche, deren Summe nach VIII. 3 $(1+x)^\mu$ ist.

Ist aber die Reihe (6) unendlich, so hat man zunächst zu untersuchen, unter welchen Bedingungen sie convergirt.

1) Zur Binomialreihe gehört das Convergenzintervall $(-1, +1)$. — Unmittelbar nach X. 22, indem

$$\frac{\mu_n}{\mu_{n-1}} = \frac{\mu-n+1}{n},$$
$$\frac{(-1)^n \mu_n}{(-1)^{n-1}\mu_{n-1}} = \left|\frac{\mu_n}{\mu_{n-1}}\right| = 1 - \frac{\mu+1}{n} \quad (n > \mu+1); \tag{7}$$

also bei $\lim n = +\infty$

$$\lim \left|\frac{\mu_n}{\mu_{n-1}}\right| = +1$$

ist. — Nach X. 19 folgt daraus ferner, dafs falls $n > \mu + 1$, $(-1)^n \mu_n$ stets dasselbe Zeichen hat, somit die Binomialcoefficienten μ_n abwechselnd positiv und negativ sind, und dafs bei $\lim n = +\infty$ $\lim |\mu_n| = 0$ oder $+\infty$, je nachdem $\mu >$ oder < -1. $\binom{-1}{n}$ ist $(-1)^n$.

2) Für $x = -1$ werden die Glieder von (6), wenn n die Zahl $\mu + 1$ übersteigt, gleichbezeichnet. Die Reihe convergirt dann und nur dann, wenn $\mu > 0$. — Nach X. 19 zufolge (7).

3) Für $x = +1$ sind, wenn n die Zahl $\mu + 1$ über-

steigt, die Glieder abwechselnd positiv und negativ. Die Reihe convergirt dann und nur dann, wenn $\mu > -1$ und zwar absolut nur, wenn $\mu > 0$. — Nach X. 20 zufolge (7).

Im Falle der Convergenz sei

$$\sum_0^\infty {}^n \mu_n x^n = \varphi(\mu, x).$$

Bedeutet m eine natürliche Zahl oder 0, so hat man, wie erwähnt,

$$\varphi(m, x) = (1 + x)^m.$$

Da somit

$$\varphi(m, x)\,\varphi(n, x) = \varphi(m + n, x), \tag{7*}$$

so liegt es nahe, das Product $\varphi(\mu, x) \cdot \varphi(\nu, x)$ im Allgemeinen zu untersuchen. Hierbei ergiebt sich leicht der Satz: „Es ist

$$\varphi(\mu, x)\,\varphi(\nu, x) = \varphi(\mu + \nu, x), \tag{8}$$

wenn nur die drei hier vorkommenden Reihen convergiren."

Mit Rücksicht auf X. 23 genügt es, den Satz unter der Voraussetzung, dafs $|x| < 1$ sei, zu beweisen, in welchem Falle die Reihen $\varphi(\mu, x)$ $\varphi(\nu, x)$ absolut convergiren. Man findet daher nach X. 10

$$\varphi(\mu, x)\,\varphi(\nu, x) = \sum_0^\infty {}^r c_r x^r,$$

wo

$$c_r = \mu_0 \nu_r + \mu_1 \nu_{r-1} + \cdots + \mu_{r-1} \nu_1 + \mu_r \nu_0.$$

Es ist nun

$$c_1 = \binom{\mu + \nu}{1}, \qquad c_2 = \binom{\mu + \nu}{2} \cdots$$

und allgemein

$$c_r = \sum_0^r {}^s \mu_s \nu_{r-s} = \binom{\mu + \nu}{r}. \tag{9}$$

Wir könnten diese Gleichung durch den Schlufs von r auf $r+1$ beweisen. Tiefer in das Wesen der Sache dringt aber die folgende Überlegung. Durch Ausrechnung des Productes $\varphi(m, x) \cdot \varphi(n, x)$ in (7*) erkennt man, dafs die Gleichung (9) besteht, falls μ, ν beide natürliche Zahlen m, n sind. Also stimmen die ganzen Functionen von μ ν $\binom{\mu + \nu}{r}$ $\sum {}^s \mu_s \nu_{r-s}$

überein für alle Werthsysteme $\mu = m$ $\nu = n$, somit die ganzen Functionen von $1:\mu$, $1:\nu$

$$\frac{1}{\mu^r \nu^r}\binom{\mu+\nu}{r} \qquad \frac{1}{\mu^r \nu^r}\sum_0^r {}_s \mu_s \nu_{r-s}$$

für jedes aus den Reihen

$$\frac{1}{\mu} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \cdots \frac{1}{m} \cdots, \qquad \frac{1}{\nu} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \cdots \frac{1}{n} \cdots$$

entnommene Werthsystem $1:\mu$, $1:\nu$. Da die Glieder in jeder der Reihen zur Null convergiren, so sind nach X. 28 die beiden letzteren Ausdrücke identisch, daher auch die beiden ersteren.

Die Gleichung (9), welche das Additionstheorem der Binomialcoefficienten genannt wird, enthält als specielle Fälle die Relationen

$$\nu = -1 \qquad \sum_0^r {}_s (-1)^s \mu_s = (-1)^r \binom{\mu-1}{r},$$

$$\nu = +1 \qquad \binom{\mu}{r} + \binom{\mu}{r-1} = \binom{\mu+1}{r}.$$

Letztere kann wie in VIII. 3 unmittelbar verificirt werden.

Nachdem gezeigt ist, daſs die Function $\varphi(\mu, x)$ der Relation (8), d. i. (1) Genüge leistet, haben wir zu beweisen, daſs sie bei constantem dem absoluten Betrage nach unter 1 liegendem x eine stetige Function von μ ist und zwar für jeden endlichen Werth von μ. Da nach (8)

$$\varphi(\mu+\nu, x) - \varphi(\mu, x) = \varphi(\mu, x)\{\varphi(\nu, x) - 1\},$$

so ist das der Fall, wenn

$$\lim_{\nu=0} \varphi(\nu, x) = 1 \qquad (|x| < 1)$$

ist. Und diese Relation besteht sicher, falls die Reihe (6) gleichmäſsig für alle Werthe von $\mu = \nu$ im Intervalle $(-M, +M)$ convergirt. Indem $-|\nu| = N$ gesetzt, —

$$|\nu_n| \leq \frac{N(N+1)\cdots(N+n-1)}{n!} = (-1)^n \binom{-N}{n};$$

so folgt, dafs für

$$-M \leqq \nu \leqq +M, \quad |\nu_n| \leqq (-1)^n \binom{-M}{n}.$$

Man findet somit

$$\left| \sum_{n+1}^{\infty} \binom{\nu}{r} x^r \right| \leqq \sum_{n+1}^{\infty} (-1)^n \binom{-M}{n} |x|^n,$$

wodurch die oben erwähnte gleichmäfsige Convergenz aufser Zweifel gesetzt ist. — Die Stetigkeit von $\varphi(\mu, x)$ nach μ folgt auch daraus, dafs $\varphi(\mu, x)$ in eine Potenzreihe nach μ verwandelt werden kann. (Vgl. Nr. 5.)

Nach dem Vorstehenden können wir schliefsen, dafs, wenn

$$-1 < x < +1, \quad \varphi(\mu, x) = \varphi(1, x)^\mu = (1 + x)^\mu. \quad (10)$$

Was die Fälle $x = -1$ und $+1$ betrifft, so gilt auch für sie diese Gleichung, wenn überhaupt die Reihe (6) convergirt. Denn es ist dann sowohl $(1 + x)^\mu$ bei $x = \pm 1$ eine stetige Function von x, als auch nach X. 23 die Summe der Reihe $\varphi(\mu, x)$.

Wir sind somit zu dem Satze gelangt: „In allen Fällen, wo die Binomialreihe convergirt, ist ihre Summe $(1 + x)^\mu$.“ [3]) — Wenn sie nicht absolut convergirt (d. i. für $x = +1$, $0 < \mu < -1$), sind die Glieder in der durch (6) angegebenen Ordnung zu summiren.

3. Näherungswerthe für die absoluten Wurzeln. Ist $1 \geqq x > 0$ und $0 < \mu < 1$, so wechseln die Glieder der Binomialreihe vom zweiten angefangen das Zeichen. Dabei ist bei $\lim n = +\infty$ $\lim \mu_n = 0$. Man hat somit nach X. 8

$$1 + \mu x + \mu_2 x^2 < (1 + x)^\mu < 1 + \mu x,$$

oder

$$0 < 1 + \mu x - (1 + x)^\mu < \frac{\mu(1-\mu)}{2} x^2. \quad (11)$$

Der zweite Theil der Relation (11) setzt nach dieser Ableitung $x \leqq 1$ voraus; er gilt jedoch, sowie der erste schon in VIII. 8 bewiesene, wenn x irgend einen positiven Werth erhält. Setzt man nämlich

$$\frac{1}{1+x} = 1 - \frac{x}{1+x},$$

so ist der Subtrahend kleiner als 1. $\left(1-\frac{x}{1+x}\right)^\mu$ liefert nun eine Binomialreihe, in der alle Glieder vom zweiten an negativ sind. Man findet also

$$\frac{1}{(1+x)^\mu} < 1 - \mu\frac{x}{1+x} + \mu_2\left(\frac{x}{1+x}\right)^2,$$

und

$$(1+x)^\mu < 1 : \left\{1 - \mu\frac{x}{1+x} + \mu_2\left(\frac{x}{1+x}\right)^2\right\}.$$

Subtrahirt man von der rechten Seite den Ausdruck

$$1 + \mu x + \mu_2 x^2,$$

so ergiebt sich ein positiver Unterschied; somit ist auch jetzt

$$(1+x)^\mu > 1 + \mu x + \mu_2 x^2.$$

Mittelst der Relation (11) kann man einen, etwa auf die gewöhnliche Art gefundenen Näherungswerth α für die $\sqrt[m]{a}$ verbessern. Kennt man von $\sqrt[m]{a}$ $n+1$ Stellen (von der ersten geltenden an gerechnet) genau, welche den Näherungswerth α bilden, so findet man weitere Stellen der Wurzel, indem man $a - \alpha^m$ durch $m\alpha^{m-1}$ dividirt. Man kann, ohne die Allgemeinheit zu beschränken, annehmen, dafs die Ziffern α bis zu den Einern einschliefslich reichen, so dafs

$$\alpha < \sqrt[m]{a} < \alpha + 1.$$

Wäre in der That die letzte Ordnung in α 10^p, so ersetzt man a, α bezüglich durch $a \,.\, 10^{-mp}$, $\alpha \,.\, 10^{-p}$. — Es sei

$$a = \alpha^m + b, \quad \sqrt[m]{a} = \alpha\sqrt[m]{1 + \frac{b}{\alpha^m}} = \alpha + z, \quad 0 < z < 1.$$

Setzt man in (11)

$$\mu = 1 : m, \qquad x = b : \alpha^m,$$

so folgt

$$0 < 1 + \frac{b}{m\alpha^{m-1}} - \sqrt[m]{1 + \frac{b}{\alpha^m}} < \frac{m-1}{2}\left(\frac{b}{m\alpha^m}\right)^2,$$

d. i.

$$0 < \alpha + \frac{b}{m\alpha^{m-1}} - \sqrt[m]{a} < \frac{m-1}{2\alpha}\left(\frac{b}{m\alpha^{m-1}}\right)^2.$$

Wenn nun

$$\alpha = c_0 \cdot 10^n + c_1 \cdot 10^{n-1} + \cdots + c_n \quad (c_0 \geqq 1,\ n \geqq 1),$$

und

$$b : m\alpha^{m-1} < 1,$$

so ergiebt sich

$$0 < \alpha + \frac{b}{m\alpha^{m-1}} - \sqrt[m]{a} < \frac{m-1}{2c_0} \cdot \frac{1}{10^n}. \tag{12}$$

Daraus kann man Folgendes ableiten.

1) Ist $m = 2$ und $c_0 < 5$, so kann man das letzte Glied in (12) durch 10^{-n} ersetzen. Demgemäfs berechne man auch $b : m\alpha^{m-1}$ auf n Stellen, so dafs

$$\frac{b}{2\alpha} = \beta + r, \qquad 0 \leqq r < \frac{1}{10^n}.$$

Sodann findet man aus (12)

$$(\alpha + \beta) - \frac{1}{10^n} < \sqrt{a} < (\alpha + \beta) + \frac{1}{10^n}.$$

Ist aber $c_0 \geqq 5$, so kann man hier 10^n durch 10^{n+1} ersetzen, wenn man auch β auf $n+1$ Stellen berechnet hat. Das liefert den folgenden Satz: „Wenn man von $\sqrt{a}$ $n+1$ Stellen genau kennt, und man berechnet den eine Einheit der letzten Stelle in α nicht erreichenden Quotienten $(a - \alpha^2) : 2\alpha$ auf n oder $n+1$ Stellen β, je nachdem die höchste Stelle in α kleiner als 5 ist oder nicht; so hat man n bez. $n+1$ weitere Stellen von $\sqrt{a}$ gefunden. Doch kann der Decimalbruch $\alpha + \beta$ um eine Einheit der letzten Stelle zu grofs sein.“ [4])

2) Ist $m \geqq 3$, so rechne man $b : m\alpha^{m-1}$ auf n Stellen, so dafs

$$\frac{b}{m\alpha^{m-1}} = \beta + r, \qquad 0 \leqq r < \frac{1}{10^n}.$$

Dann ergiebt sich aus (12)

$$(\alpha + \beta) - \frac{m-1}{2} \cdot \frac{1}{10^n} < \sqrt[m]{\alpha} < (\alpha + \beta) + \frac{1}{10^n}.$$

„Kennt man von $\sqrt[3]{a}$ $n+1$ Stellen α und man berechnet den eine Einheit der letzten Stelle von α nicht erreichenden Quotienten $(a - \alpha^3) : 3a^2$ auf n Stellen β; so hat man n weitere Stellen von $\sqrt[3]{a}$ gefunden. Doch kann der

Decimalbruch $\alpha + \beta$ um eine Einheit der letzten Stelle zu grofs sein." U. s. f.

Indem $z < b : m\alpha^{m-1}$, so kann $b : m\alpha^{m-1} \geqq 1$ sein. In einem solchen Falle kann man sich die Ausführung obiger Division ersparen. Man erhält aus

$$b = (\alpha + z)^m - \alpha^m = m\alpha^{m-1} z + m_2 \alpha^{m-2} z^2 + \cdots + z^m$$

$$z = \frac{b}{m\alpha^{m-1}} - \frac{m-1}{2} \cdot \frac{z^2}{\alpha} - \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{z^3}{\alpha^2}$$
$$- \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{m-3}{4} \cdot \frac{z^4}{\alpha^3} - \cdots,$$

somit

$$z > 1 - \frac{m-1}{2} \cdot \frac{1}{\alpha} - \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{1}{\alpha^2}$$
$$- \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{m-3}{4} \cdot \frac{1}{\alpha^3} - \cdots$$

1) Für $m = 2$ ergiebt sich hieraus

$$\alpha + 1 - \frac{1}{2c_0} \cdot \frac{1}{10^n} < \sqrt{a} < \alpha + 1.$$

D. h. „Ist $(a - \alpha^2) : 2\alpha$ gleich oder gröfser als eine Einheit der letzten Stelle in α, so folgen in $\sqrt{a}$ auf α mindestens n oder $n + 1$ Neuner, je nachdem die höchste Stelle in α kleiner als 5 ist oder nicht."

2) Für $m = 3$ hat man

$$\alpha + 1 - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{3\alpha \cdot 10^n} < \sqrt[3]{a} < \alpha + 1,$$

woraus man den Satz folgert: „Ist $(a - \alpha^3) : 3\alpha^2$ gleich oder gröfser als eine Einheit der letzten Stelle in α, so folgen in $\sqrt[3]{a}$ auf α mindestens n Neuner."

3) Wenn $m > 3$, und α so grofs ist, dafs

$$\frac{m-3}{4} \cdot \frac{1}{\alpha} < 1,$$

so hat man, da die Brüche $(m - k + 1) : k$ mit wachsendem k abnehmen,

$$z > 1 - \frac{m-1}{2} \cdot \frac{1}{\alpha} - \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{1}{\alpha^2} \left\{ 1 + \frac{m-3}{4\alpha} \right.$$
$$\left. + \left(\frac{m-3}{4\alpha}\right)^2 + \cdots \right\},$$

d. i.

$$z > 1 - \frac{m-1}{2} \cdot \frac{1}{\alpha} - \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{1}{\alpha^2} : \left(1 - \frac{m-3}{4\alpha}\right).$$

Daraus folgt

$$\alpha + 1 - \frac{m-1}{2} \cdot \frac{1}{\alpha} - \frac{(m-1)(m-2)}{6\alpha \cdot 10^n} : \left(1 - \frac{m-3}{4 \cdot 10^n}\right)$$
$$< \sqrt[m]{a} < \alpha + 1,$$

woraus man ähnliche Schlüsse wie oben ziehen kann. Die Summe der beiden letzten Glieder links liegt unter $\frac{m-1}{2}\, 10^{-n}$, wenn

$$\alpha \geqq 10^n + \frac{m-2}{3} : \left(1 - \frac{m-3}{4} \cdot \frac{1}{10^n}\right).$$

4. Wenn man zur Verbesserung eines Näherungswerthes α der $\sqrt[m]{a}$ auch noch das Glied mit der zweiten Potenz in der Binomialreihe (6) heranziehen will, so bedient man sich mit Vortheil der Lambert'schen Formeln.[5])

Multiplicirt man die Binomialreihe mit einer linearen Function $1 + \gamma x$, so findet man, sicher so lange $|x| < 1$,

$$(1 + x)^\mu (1 + \gamma x) = 1 + (\mu + \gamma) x + (\mu_2 + \mu\gamma) x^2 + \cdots$$
$$+ (\mu_n + \mu_{n-1}\gamma) x^n + \cdots \tag{13}$$

Hier bestimmt man γ so, dafs das Glied mit x^2 ausfällt, d. i. man setzt

$$\mu_2 + \mu\gamma = 0, \qquad \gamma = \frac{1-\mu}{2}.$$

Nunmehr erhält man

$$\lambda_3 = \mu_3 + \mu_2\gamma = \frac{\mu(1-\mu^2)}{12},$$

$$\lambda_n = \mu_n + \mu_{n-1}\gamma = (-1)^{n-1}\mu(1-\mu^2)(2-\mu)\ldots$$
$$(n-2-\mu)(n-2) : 2 \cdot n! \quad (n > 3).$$

Unter der Voraussetzung, dafs $0 < \mu < 1$ und $x > 0$ sei, wechseln die Glieder der Reihe (13) von $n = 3$ an ihr Zeichen. Da

$$\left|\frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}}\right| = \frac{n-2-\mu}{n} \cdot \frac{n-2}{n-3} = \left(1 - \frac{2+\mu}{n}\right) \frac{1 - \frac{2}{n}}{1 - \frac{3}{n}}$$
$$= 1 - \frac{\mu+1}{n} + \cdots,$$

so ergiebt sich nach X. 19, dafs $|\lambda_n|$ bei wachsendem n beständig abnimmt (und zwar von $n=3$ an) und bei $\lim n = +\infty$

den Grenzwerth 0 hat. Es convergirt somit die Reihe (13) auch für $x = +1$ und ihre Summe ist $(3-\mu)2^{\mu-1}$.

Nach X. 8 findet man nun

$$\begin{aligned} 0 < (1+x)^{\mu}\left(1+\frac{1-\mu}{2}x\right) - \left\{1+\frac{1+\mu}{2}x\right\} \\ < \frac{\mu(1-\mu^2)}{12}x^3, \end{aligned} \tag{14}$$

oder

$$\begin{aligned} 0 < (1+x)^{\mu} - \left[1+\frac{\mu x}{1+\frac{1-\mu}{2}x}\right] \\ < \frac{\mu(1-\mu^2)}{12}x^3 : \left(1+\frac{1-\mu}{2}x\right). \end{aligned}$$

Hier setze man, wie oben $\mu = 1 : m$ $x = b : a^m$, welche Zahl wir jetzt $\leqq 1$ annehmen; dadurch ergiebt sich durch Multiplication mit α

$$0 < \sqrt[m]{a} - \left[\alpha + \frac{b}{m\alpha^{m-1} + \frac{m-1}{2}\frac{b}{\alpha}}\right] < \frac{m^2-1}{12\alpha^2}\cdot\left(\frac{b}{m\alpha^{m-1}}\right)^3.$$

$$L = b : \left\{m\alpha^{m-1} + \frac{m-1}{2}\frac{b}{\alpha}\right\}$$

ist die Lambert'sche Ergänzung des Näherungswerthes α. Der Fehler liegt, wenn $b : m\alpha^{m-1} < 1$ ist, unter

$$\frac{m^2-1}{12 \,.\, c_0^2 \,.\, 10^{2n}}.$$

Daraus ergeben sich ähnliche Sätze wie in der vorigen Nummer. Ist z. B.

$$1 \geqq \frac{m^2-1}{12 \,.\, c_0^2} > \frac{1}{10},$$

so berechne man L auf $2n$ Stellen, so dafs

$$L = \lambda + r, \qquad 0 \leqq r < 10^{-2n};$$

worauf man finden wird:

$$\alpha + \lambda < \sqrt[m]{a} < \alpha + \lambda + \frac{2}{10^{2n}}.$$

D. h. man hat $2n$ weitere Stellen von $\sqrt[m]{a}$ erhalten; doch kann die letzte Stelle um eine Einheit zu klein sein.

5. Reihenentwickelung für den Logarithmus. Nach (5) und (6) bestehen die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}(1+x)^\mu &= 1+\mu l(1+x)+\frac{\mu^2[l(1+x)]^2}{2!}+\cdots\\ &= 1+\mu x+\mu_2 x^2+\cdots\end{aligned}\right\}\quad |x|<1.$$

Ist es gestattet, die untere Reihe nach Potenzen von μ zu ordnen, so erhalten wir zufolge des Satzes in X. 24, indem wir die Coefficienten der gleichen Potenzen von μ in beiden Zeilen einander gleichsetzen, Potenzreihen für $l(1+x)$, $\left[l(1+x)\right]^2$ u. s. f.[6]) Da μ_n nach Potenzen von μ entwickelt den Ausdruck

$$\mu_n = -\frac{\mu}{n}+a_{n,2}\mu^2+\cdots+\frac{\mu^n}{n!} \tag{15}$$

liefert, so ergiebt sich auf diese Weise die Entwickelung

$$l(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots \tag{16}$$

Dafs sich die Binomialreihe, wenn x numerisch kleiner als 1 ist, in eine Potenzreihe von μ verwandeln läfst, folgt aus dem 3. Satze in X. 11. Nach demselben hat man zunächst die absoluten Beträge der Glieder in (15) zu summiren, wodurch man — $|\mu| = M$ gesetzt —

$$\frac{M(M+1)\cdots(M+n-1)}{n!} = (-1)^n\binom{-M}{n}$$

erhält. Denn dieser Ausdruck liefert, nach Potenzen von M entwickelt, Coefficienten von demselben numerischen Werthe wie die in (15). Weiter ist zu bemerken, dafs die aus den eben genannten mit X^n multiplicirten Ausdrücken gebildete Reihe

$$1+MX+\binom{-M}{2}(-X)^2+\cdots+\binom{-M}{n}(-X)^n+\cdots$$
$$X=|x|$$

in der That convergirt, so lange $X<1$.

Die Gleichung (16) besteht somit für alle Werthe von x, welche dem absoluten Betrage nach unter 1 liegen. Sie gilt auch noch für $x=1$, da die rechte Seite convergirt und sowohl die Function $l(1+x)$ als auch die Summe der Potenzreihe für $x = 1$ wenigstens nach rückwärts stetig sich ändern (X. 23). Wir haben somit für die nicht absolut convergirende, schon in X. 8 erwähnte Reihe $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots$ den Grenzwerth $l2$. In allen anderen Fällen ist die logarithmische Reihe divergent.

Man erhält die Reihe für $y = l(1 + x)$ auch aus der Gleichung $e^y = 1 + x$, d. i.

$$e^y - 1 = y + \frac{y^2}{1 \cdot 2} + \cdots = x,$$

durch Umkehrung der links stehenden Reihe. Nach X. 30 genügt ihr eine und nur eine convergente Potenzreihe

$$y = g(x) = x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots$$

Die Bestimmung der Coefficienten kann vermittelst der Gleichung (10) a. a. O. erfolgen. Wegen

$$e^{y+h} - e^h = e^y(e^h - 1) = e^y\left(h + \frac{1}{2}h^2 + \cdots\right)$$

folgt

$$D_y e^y = e^y,$$

somit

$$1 = e^y g'(x),$$

oder

$$\frac{1}{1+x} = 1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \cdots,$$

woraus sofort sich ergiebt $nc_n = (-1)^{n-1}$.

Vertauscht man in (16) x mit $-x$, so erhält man

$$-l(1 - x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots \qquad -1 \leq x < +1;$$

somit durch Addition dieser und der Formel (16)

$$l\,\frac{1+x}{1-x} = 2\left\{x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right\} \qquad -1 < x < +1. \quad (17)$$

Nach X. 32 hat man als Fehlergrenze — wenn $|x| = X$ —

$$r_k = \frac{X^{2k+1}}{2k+1} + \frac{X^{2k+3}}{2k+3} + \cdots < \frac{X^{2k+1}}{2k+1} : (1 - X^2). \quad (18)$$

Wenn irgend eine positive Zahl N vorgelegt wird, so liefert die Gleichung

$$\frac{1+x}{1-x} = N \qquad x = \frac{N-1}{N+1},$$

also für x einen Werth, der seinem absoluten Betrage nach unter der Einheit liegt. Somit kann lN durch die Reihe (17) erhalten werden, jedoch zur numerischen Berechnung ist sie in der Regel nicht geeignet. Auf diese Weise ist berechnet worden

$$l2 = 2\left\{\frac{1}{3} + \frac{1}{3\,.\,3^3} + \frac{1}{5\,.\,3^5} + \cdots\right\}.$$

Setzt man

$$N = (a + h) : a,$$

unter a eine positive, unter h eine Zahl $> -a$ verstanden; so wird

$$x = h : (2a + h)$$

und man findet

$$l(a + h) - la = 2\left\{\frac{h}{2a + h} + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{h}{2a + h}\right)^3 + \cdots\right\}. \quad (19)$$

Der Unterschied der Logarithmen zweier Zahlen läfst sich in eine nach den ungeraden Potenzen des Quotienten: Unterschied der Zahlen dividirt durch ihre Summe, fortschreitende Reihe entwickeln. Für $a = 4$, $h = 1$ folgt aus (19)

$$l5 = 2l2 + 2\left\{\frac{1}{9} + \frac{1}{3}\,\frac{1}{9^3} + \cdots\right\}.$$

Man hat nun auch

$$l10 = l2 + l5$$

und damit den Modulus M des Briggischen Systemes

$$M = 1 : l10 = 0,\ 43429\ 44819\ \ldots$$

6. Nach Ermittelung des Modulus lassen sich die Reihen (17), (19) auch zur Berechnung der gemeinen Logarithmen verwenden. So findet man aus (19) durch Multiplication mit M (VIII. 9)

$$\log(a + h) = \log a + 2M\left\{\frac{h}{2a + h} + \frac{1}{3}\left(\frac{h}{2a + h}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{h}{2a + h}\right)^5 + \cdots\right\}. \quad (20)$$

Das erste Glied dieser Reihe reicht, wie Koralek bemerkt hat,[7]) hin, um die Logarithmen aller Zahlen N von 10^6 bis 10^7 auf sieben Decimalen zu berechnen, wenn die Logarithmen von 2, 3, 7, 11, 13 bekannt sind. Setzt man $h = au$, so wird nach (18) und X. 31 $\log(a+h)$ bis auf eine halbe Einheit der 7ten Decimale bestimmt sein, wenn

$$\pm \frac{2M}{3}\left(\frac{u}{2+u}\right)^3 : \left\{1-\left(\frac{u}{2+u}\right)^2\right\} \leq \frac{1}{2 \,.\, 10^{7+l}}(10^l-2).$$

Hier setzen wir $l=1$ und beachten, dafs u seinem absoluten Betrage nach $\frac{1}{126}$ nicht zu übersteigen braucht. Unter dieser Voraussetzung ist in der That

$$\pm \frac{2Mu^3}{3 \,.\, 4(2+u)(1+u)} \leq \frac{4}{10^8}.$$

Die linke Seite ist nämlich, da $2M<1$, numerisch kleiner als

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{250^3} = \frac{2{,}1\dot{3}}{10^8}.$$

Die Einschränkung $|u| < 1:126$ erzielt Koralek auf folgende Art. Zunächst dividiren wir die gegebene Zahl N durch 10 000 und multipliciren den Quotienten ν mit einer solchen Zahl p, deren Logarithmus aus den gegebenen sich unmittelbar ergiebt, so dafs

$$800 < p\nu < 1000.$$

Derartige Factoren sind:

$p = 9$	für die Zahl ν zwischen	100	und	111	
8	„ „ „ „ „	111	„	125	
7	„ „ „ „ „	125	„	142	
6	„ „ „ „ „	142	„	166	
5	„ „ „ „ „	166	„	200	($\log 5 = 1 - \log 2$)
4	„ „ „ „ „	200	„	250	
$\frac{7}{2}$	„ „ „ „ „	250	„	285	
3	„ „ „ „ „	285	„	333	
$\frac{5}{2}$	„ „ „ „ „	333	„	400	
2	„ „ „ „ „	400	„	500	
$\frac{5}{3}$	„ „ „ „ „	500	„	600	
$\frac{3}{2}$	„ „ „ „ „	600	„	666	
$\frac{5}{4}$	„ „ „ „ „	666	„	800.	

Somit ist die Aufgabe zurückgeführt auf die Berechnung der Logarithmen der ganzen Zahlen zwischen 800 und 1000. 25 von diesen Zahlen enthalten nur die Primfactoren 2, 3, 5, 7, 11, 13; ihre Logarithmen sind somit bekannt. Diese Zahlen sind 800, 810, 819, 825, 832, 840, 845, 858, 864, 875, 880, 891, 896, 900, 910, 924, 936, 945, 960, 968, 972, 975, 980, 990, 1000. Bilden wir den Unterschied je zweier benachbarten und dividiren ihn durch die doppelte kleinere Zahl, so erhalten wir höchstens

$$\frac{960-945}{2 \,.\, 945} = \frac{1}{126}.$$

Das ist das Maximum von $|u|$.

Die Logarithmen der Zahlen 2, 3, 7, 11, 13 müssen mit Hilfe der Reihe (20) auf mehr als 7 Stellen berechnet werden. Man hat

$$10\log 2 = \log 1024 = \log 1000 + 2M\left\{\frac{24}{2024} + \frac{1}{3}\left(\frac{24}{2024}\right)^3 + \cdots\right\},$$

$$4\log 3 = \log 81 = \log 80 + 2M\left\{\frac{1}{161} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{161}\right)^3 + \cdots\right\},$$

$$4\log 7 = \log 2401 = \log 2400 + 2M\left\{\frac{1}{4801} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4801}\right)^3 + \cdots\right\},$$

$$\log 13 + \log 11 + \log 7 = \log 1001 = \log 1000$$
$$+ 2M\left\{\left(\frac{1}{2001}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2001}\right)^3 + \cdots\right\}.$$

7. Ein sehr bequemes Verfahren, natürliche oder gemeine Logarithmen auf jede beliebige Anzahl von Decimalen zu berechnen, beruht auf dem folgenden Satze, wonach jede positive Zahl in ein unendliches Product verwandelt werden kann.

Satz. „Es sei N eine beliebige positive Zahl, a ihre erste geltende Ziffer und zwar von der Ordnung 10^m, so dafs

$$a \cdot 10^m \leqq N < (a+1)\, 10^m.$$

Dann lassen sich n einzifferige Zahlen

$$c_1,\ c_2 \ldots c_n \qquad (0 \leqq c_r \leqq 9)$$

finden (und zwar kann es auch mehr als ein solches System c_r geben), so dafs das Product

$$P_n = \frac{N}{(a+1)\, 10^m} \prod_1^n {}_r \left(1 + \frac{c_r}{10^r}\right) \tag{a}$$

zwischen den Grenzen $1 - \frac{1}{10^n}$ und 1 liegt:

$$0 < 1 - P_n < \frac{1}{10^n}.\text{“} \tag{b}$$

Da $a \geqq 1$, so ist der echte Bruch $v = N : (a+1)\, 10^m$ gröfser als $\frac{1}{2}$, wobei wir den Fall $N = 10^m$ nicht berücksichtigen. Ist $v > 0{,}9$, so setze man $c_1 = 0$; ist $v \leqq 0{,}9$, so können wir eine Ziffer c_1 bestimmen, so dafs

$$0{,}9 < \nu\left(1 + \frac{c_1}{10}\right) < 1;$$

denn es liegt

$$1 + \frac{c_1}{10}$$

zwischen den Grenzen 1 und 2. c_1 kann höchstens zwei Werthe haben; denn es ist bereits

$$\nu\left(1 + \frac{c_1 + 2}{10}\right) > 0{,}9 + 2 \,.\, 0{,}05 = 1.$$

Zwei Werthe von c_1 kommen in der That manchmal vor, wie wir sogleich sehen werden. — Wenn $P_1 > 0{,}99$, so nimmt man $c_2 = 0$; ist aber $P_1 \leq 0{,}99$, so liefert die Relation

$$P_1 = \nu\left(1 + \frac{c_1}{10}\right), \qquad 0{,}99 < P_1\left(1 + \frac{c_2}{10^2}\right) < 1,$$

$$1 < 1 + \frac{c_2}{10^2} < \frac{10}{9} = 1{,}\dot{1},$$

so dafs die Werthe $c_2 = 10,\ 11$ nicht ausgeschlossen erscheinen. Kommt man auf den Werth $c_2 = 10$, so ist auch

$$\nu\left(1 + \frac{c_1 + 1}{10}\right) < \frac{1}{1{,}1} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{c_1}{10}\right) 1{,}1}$$

$$= \frac{10}{11}\left\{1 + \frac{1}{10 + c_1}\right\} \leq 1;$$

es kann somit c_1 durch $c_1 + 1$ ersetzt werden, was auch im Falle $c_2 = 11$ möglich ist. Gebraucht man nun anstatt P_1

$$P_1' = \nu\left(1 + \frac{c_1 + 1}{10}\right) = P_1 + \frac{\nu}{10},$$

so ist

$$1 + \frac{c_2'}{10^2} < \frac{1}{P_1'} < \frac{1}{0{,}9 + 0{,}05} < 1{,}1;$$

somit mufs die ganze Zahl $c_2' \leq 9$ sein. U. s. f. Angenommen, man hätte $n - 1$ Ziffern $c_1\, c_2 \ldots c_{n-1}$ gefunden, so dafs die Relationen bestehen

$$(n \geq 3), \quad 1 - \frac{1}{10^{n-r}} < P_{n-r} < 1 \qquad (r = 1, 2 \ldots \cdot n - 1),$$

so kann man stets einen Multiplicator

$$1+\frac{c_n}{10_n},$$

wo c_n eine einzifferige ganze Zahl bedeutet, finden, wodurch

$$1-\frac{1}{10^n}<P_{n-1}\left(1+\frac{c_n}{10^n}\right)<1 \tag{c}$$

wird. Ist P_{n-1} schon

$$>1-\frac{1}{10^n},$$

so setzt man $c_n=0$. Ist aber

$$P_{n-1}\leqq 1-\frac{1}{10^n},$$

so erhält man freilich für

$$1+\frac{c_n}{10^n}$$

zunächst die Grenzen 1 und

$$1:\left(1-\frac{1}{10^{n-1}}\right)=1+\frac{1}{10^{n-1}}+\frac{1}{10^{2n-2}}+\cdots;$$

wodurch der Werth $c_n=10$ nicht ausgeschlossen wird. Sollte in der That $c_n=10$ sich ergeben, so läſst sich an Stelle von P_{n-1}

$$P'_{n-1}=P_{n-2}\left(1+\frac{c_{n-1}+1}{10^{n-1}}\right)=P_{n-1}+\frac{P_{n-2}}{10^{n-1}}$$

setzen, worauf in der Relation (c) $c_n'\leqq 9$ genommen werden kann. Man hat nämlich einerseits

$$P'_{n-1}<\frac{1}{1+\frac{1}{10^{n-1}}}\left[1+\frac{1}{10^{n-1}}\cdot\frac{1}{1+\frac{c_{n-1}}{10^{n-1}}}\right]\leqq 1;$$

andererseits

$$P'_{n-1}>1-\frac{1}{10^{n-1}}+\frac{1}{10^{n-1}}\left(1-\frac{1}{10^{n-2}}\right)$$

$$=1-\frac{1}{10^{2n-3}}>\frac{1}{1+\frac{1}{10^{n-1}}},$$

somit

$$1+\frac{c_n'}{10^n}<\frac{1}{P'_{n-1}}<1+\frac{1}{10^{n-1}}.$$

Die Berechnung der Zahlen $c_1\ c_2\dots$ wird durch die folgenden Bemerkungen wesentlich erleichtert. Setzt man

$\nu = 1 - \varrho$ und

$$\varrho = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots \quad (0 \leqq a_1 \leqq 4),$$

so ist

$$1 - P_1 = \frac{a_1 - c_1}{10} + \frac{a_2 + a_1 c_1}{10^2} + \cdots$$

Daraus folgt, dafs $c_1 \geqq a_1$ sein mufs. Setzt man ferner

$$z_n = 1 - P_n = \frac{a_{n+1}^{(n)}}{10^{n+1}} + \frac{a_{n+2}^{(n)}}{10^{n+2}} + \cdots \quad (n \geqq 1),$$

so kann man leicht zeigen, dafs

$$a_n^{(n-1)} + 2 > c_n \geqq a_n^{(n-1)} \qquad (n \geqq 2)$$

sein mufs. Es ist nämlich

$$z_n = \frac{a_n^{(n-1)} - c_n}{10^n} + \frac{a_{n+1}^{(n-1)}}{10^{n+1}} + \cdots$$

und nach (c)

$$1 + \frac{c_n}{10^n} < \frac{1}{1 - z_{n-1}}$$

$$\frac{1}{1 - z_{n-1}} < 1 + \frac{a_n^{(n-1)} + 2}{10^n}.$$

Letztere Ungleichung erhellt unmittelbar, wenn man

$$z_{n-1} = \frac{a_n^{(n-1)} + \varrho^{(n-1)}}{10^n} \qquad 0 < \varrho^{(n-1)} < 1$$

setzt und die linke Seite derselben von der rechten subtrahirt. Man hat somit bezüglich c_n die Wahl zwischen den Werthen $a_n^{(n-1)}$ und $a_n^{(n-1)} + 1$; es wird jedoch, wie aus der Betrachtung der Differenz

$$1 + \frac{a_n^{(n-1)}}{10^n} - \frac{1}{1 - z_{n-1}}$$

$$= \frac{1}{(1 - z_{n-1})\, 10^n} \left[1 - \frac{a_n^{(n-1)2}}{10^n} - \varrho^{(n-1)} \left(1 + \frac{a_n^{(n-1)}}{10^n}\right)\right]$$

unmittelbar folgt, die letztere Annahme mit wachsendem n immer seltener. Sie setzt nämlich voraus

$$\varrho^{(n-1)} > \left(1 - \frac{a_n^{(n-1)^2}}{10^n}\right) : \left(1 + \frac{a_n^{(n-1)}}{10^n}\right) \geqq \left(1 - \frac{81}{10^n}\right) : \left(1 + \frac{9}{10^n}\right).$$

Bei der Berechnung der $z_1 z_2 \ldots z_n$ benutzt man nach R. Hoppe[8]) mit Vortheil die Relationen

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= 1 - \nu \left\{1 + \frac{c_1}{10}\right\} = \varrho + \frac{\varrho c_1}{10} - \frac{c_1}{10} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_n &= 1 - P_{n-1}\left(\frac{c_n}{10^n}\right) = 1 - (1 - z_{n-1})\left(1 + \frac{c_n}{10^n}\right) \\ &= z_{n-1} + z_{n-1}\frac{c_n}{10^n} - \frac{c_n}{10^n}. \end{aligned}\right\} \quad \text{(d)}$$

Die Anordnung der Rechnung wird sich am besten aus einem Beispiele ergeben. „Es sei $N = 131$ und es seien die Zahlen $c_1, c_2 \ldots c_{10}$ zu ermitteln.“ Dabei bedienen wir uns der Abkürzung $1\,.\,0^{n-1}c_n$ statt $1 + \dfrac{c_n}{10^n}$.

Man findet

$$\nu \doteq \frac{131}{200} = 0{,}655 \qquad \varrho = 1 - \nu = 0{,}345.$$

Für c_1 kann 4 genommen werden. Bei Berechnung der $z_1, z_2 \ldots$ werden, damit c_{10} noch sicher angegeben werden kann, 12 Decimalen angesetzt. Unter Anwendung der vorstehenden Sätze, insbesondere der Relation (d) gestaltet sich die Rechnung folgendermafsen:

ϱ	0,345			1,4
$0{,}4\ \varrho$	1380			
z_1	83			1,08
$0{,}08\ z_1$	664			
z_2	964			$1{,}0^{2}9$
$0{,}0^{2}9\ z_2$	8	676		
z_3	72	676		$1{,}0^{3}7$
$0{,}0^{3}7\ z_3$		5087	32	
z_4	2	72687	32	$1{,}0^{4}2$
$0{,}0^{4}2\ z_4$		5	45	
z_5		72692	77	$1{,}0^{5}7$
$0{,}0^{5}7\ z_5$			51	
z_6		2693	28	$1{,}0^{6}2$
z_7		· 693	28	$1{,}0^{7}6$

(e)

Dabei sind die anfänglichen Nullen in $z_1 = 0{,}083$ u. s. w. weggelassen. Man setzt $c_2 = 8$ d. i. der Anzahl der Hundertel in z_1, was sich bewährt, da z_2 in der That positiv und kleiner als $0{,}01$ ausfällt. Für c_3 nimmt man die Anzahl der Tausendtel in z_2 u. s. f. Für $n \geqq 7$ verlieren die Producte $z_{n-1}\dfrac{c_n}{10^n}$ jeden Einflufs, von da an ist einfach

$$c_8 = 6, \quad c_9 = 9, \quad c_{10} = 3, \quad z_{10} = 0{,}0^{10}28$$

zu setzen. Demnach findet man

$$\frac{131}{200} \cdot 1{,}4 \cdot 1{,}08 \cdot 1{,}0^2 9 \cdot 1{,}0^3 7 \cdot 1{,}0^4 2 \cdot 1{,}0^5 7 \cdot 1{,}0^6 2 \cdot 1{,}0^7 6 \cdot 1{,}0^8 9 \cdot 1{,}0^9 3 = 1 - z_{10},$$

wo

$$0 < z_{10} < \frac{1}{10^{10}}.$$

Man hätte auch $c_1 = 5$ setzen können, wonach sich ergeben würde

$$c_2 = 1 \quad c_3 = 7 \quad c_4 = 7 \quad c_5 = 2 \quad c_6 = 9 \quad c_7 = 2 \quad c_8 = 3$$
$$c_9 = 5 \quad c_{10} = 7 \quad z_{10} = 0{,}0^{10}75.$$

Nun ist noch zu untersuchen, ob alle c_n auch die richtigen Werthe erhalten haben, d. h. man hat den in Folge der vernachlässigten Stellen entstandenen Fehler von z_{10} zu schätzen. Es sei φ_n eine obere Grenze für den absoluten Betrag des Fehlers z_n. Dann ist, so lange die Producte $z_{n-1}\dfrac{c_n}{10^n}$ noch angeschrieben werden können, zufolge (d)

$$\begin{aligned}\varphi_n &< \varphi_{n-1} + \left\{\varphi_{n-1} + \frac{1}{2}\,10^{-q+n-1}\right\}\frac{c_n}{10^n} + \frac{1}{2}\,10^{-q} \\ &= \varphi_{n-1} + \varphi_{n-1}\frac{c_n}{10^n} + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{c_n}{10}\right)10^{-q},\end{aligned}$$

worin q den Index der letzten noch berücksichtigten Decimale bedeutet. Denn bei der Multiplication mit $\dfrac{c_n}{10^n}$ kommt erst die Ordnung 10^{-q+n} vollständig in Betracht; man corrigirt nun die darauf folgende Ziffer, so dafs absolut genommen aufser φ_{n-1} höchstens $\frac{1}{2}\cdot 10^{-q+n-1}$ vernachlässigt wird, und schreibt von dem Product derselben mit c_n soviel an, dafs der Fehler weniger als $\frac{1}{2}\cdot 10^{-q}$ beträgt. Wird aber vom

Producte $z_{n-1}\frac{c_n}{10^n}$ nichts mehr angeschrieben, so hat man

$$\varphi_n < \varphi_{n-1} + z_{n-1}\frac{c_n}{10^n} < \varphi_{n-1} + \frac{c_n}{10^{2n-1}} \leqq \varphi_{n-1} + \frac{9}{10^{2n-1}}.$$

Unter Berücksichtigung dieser Regeln findet man für den Fehler von z_{10} in (e), absolut genommen, die obere Grenze $\frac{1,67}{10^{12}}$. Somit ist in $z_9 = 0,0^9 328$ die Ziffer 3 völlig sicher.

Aus der Gleichung

$$\frac{N}{(a+1)\,10^m} \cdot \prod_1^n{}_r \left(1 + \frac{c_r}{10^r}\right) = 1 - z_n \qquad 0 < z_n < \frac{1}{10^n}$$

folgt für jeden Logarithmus von N

$$\begin{aligned} \log N = m \log 10 + \log (a+1) + \log (1 - z_n) \\ - \sum_1^n{}_r \log \left(1 + \frac{c_r}{10^r}\right), \end{aligned} \tag{f}$$

worin

$$\log (1 - z_n) = -M\left\{z_n + \frac{1}{2} z_n^2 + \cdots\right\}.$$

Läſst man $\log (1 - z_n)$ hier weg, so begeht man einen Fehler zwischen den Grenzen $-\frac{M z_n}{1 - z_n}$ und 0. Sind die übrigen Logarithmen auf je $n + l$ Stellen bekannt, so tritt hierzu noch ein Fehler zwischen

$$-\frac{n+2}{2} \cdot \frac{1}{10^{n+l}} \quad \text{und} \quad \frac{n+2}{2} \cdot \frac{1}{10^{n+l}}.$$

Hat man auch z_n auf $n + l$ Stellen gerechnet, so ist es vortheilhaft $\log (1 - z_n)$ in (f) durch $-M z_n$ zu ersetzen, wodurch der davon herrührende Fehler von $\log N$ innerhalb die Grenzen

$$M\left(\pm \varphi_n - \frac{z_n^2}{2(1 - z_n)}\right)$$

gebracht wird.

Die Berechnung von $\log N$ ist hiermit zurückgeführt auf die Logarithmen der Zahlen

$$2 - 10 \quad \text{und} \quad 1 + \frac{c_r}{10^r} \qquad (c_r = 1, 2 \ldots 9)$$

und zwar um einige Stellen weiter, als für $\log N$ verlangt sind. Die $\log\left(1+\frac{c_r}{10^r}\right)$ können nach den Reihen in Nr. 5 und 6 berechnet werden. Man findet die gemeinen Logarithmen solcher Zahlen auf 15 Stellen in den Tafeln von Gernerth, die natürlichen Logarithmen auf 33 Stellen bei Hoppe.

Vermittelst der ersteren ergiebt sich in unserem Beispiele aus (e)

$$\log 131 = 2{,}11727\ 12956\ 57$$

mit den Fehlergrenzen $\pm 6 \cdot 2 : 10^{12}$. Man darf somit setzen

$$\log 131 = 2{,}11727\ 1295\underline{7}.$$

8. Reihen für einige zusammengesetzte Functionen.

a) Wenn

$$f(x) = \sum_0^\infty {}^n a_n x^n$$

eine endliche oder eine im Intervalle $-R < x < +R$ convergente unendliche Potenzreihe bedeutet, so läfst sich nach dem Satze in X. 25 die Function $e^{f(x)}$ für eben dieselben Werthe von x in eine Potenzreihe nach x verwandeln.

$$e^{f(x)} = e^{a_0}\left[1 + \sum_0^\infty {}^n \frac{[f(x)-a_0]^n}{n!}\right] = b_0 + b_1 x$$
$$+ b_2 x^2 + \ldots = g(x). \qquad (1)$$

Das folgt aus der beständigen Convergenz der e^f-Reihe.

Wir wollen nun zeigen, dafs die Coefficienten $b_1, b_2 \ldots$ recurrirend aus $b_0 = e^{a_0}$ sich bestimmen lassen. Es sei x ein Werth innerhalb des Intervalles $(-R, +R)$. Dann hat man

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \ldots$$
$$g(x+h) = g(x) + hg'(x) + \ldots$$
$$e^{f(x)+hf'(x)+\ldots} = g(x) + hg'(x) + \ldots$$

Verwandelt man auch die linke Seite in eine Reihe nach

Potenzen von h, so folgt nach X. 24 — indem diese Gleichung für alle Werte $|h| < R - |x|$ besteht — die Identität der Coefficienten derselben Potenzen von h. Somit ist

$$g(x) f'(x) = g'(x)$$

d. i.

$$(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 \ldots)(a_1 + 2a_2 x^2 + \ldots) = b_1 + 2b_2 x + \ldots, \quad (2)$$

woraus nach dem soeben erwähnten Satze die gesuchten Recursionsformeln sich ergeben:

$$\begin{gathered} b_0 a_1 = b_1 \\ 2b_0 a_2 + b_1 a_1 = 2b_2 \\ 3b_0 a_3 + 2b_1 a_2 + b_2 a_1 = 3b_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ nb_0 a_n + (n-1) b_1 a_{n-1} + \ldots + b_{n-1} a_1 = nb_n. \end{gathered}$$

Beispiel. Aus der Gleichung

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{l(1+x)}{x}} = e^{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \ldots}$$

folgt

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = e\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{11}{24}x^2 - \frac{7}{16}x^3 + \ldots\right) \qquad -1 < x < +1.$$

Dabei wird der Function für $x = 0$, wofür sie nicht definirt ist, der Werth e beigelegt. Und zwar ist das Intervall $(-1, +1)$ der vollständige Convergenzbereich. Denn würde derselbe über dieses Intervall hinausragen, so müfste die Reihe rechts für $x = -1$ convergiren und es müsste

$$\lim_{x=-1+0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

endlich sein (X. 23). Der Grenzwerth ist aber $+\infty$, folglich convergirt die vorstehende Reihe für $x = -1$ nicht.

b) Ist $a_0 > 0$, so hat man

$$l\,f(x) = l\,a_0 + l\,\frac{f(x)}{a_0} = la_0 + \frac{f(x) - a_0}{a_0} - \frac{1}{2}\left(\frac{f(x) - a_0}{a_0}\right)^2 + \ldots,$$

somit läfst sich nach X. 25 eine positive Zahl K angeben so, dafs $l\,f(x)$ für alle Werthe von x: $|x| < K$ in eine Potenzreihe von x entwickelt werden kann. Das vollständige Convergenzintervall derselben erfährt man jedoch auf diesem Wege nicht. Setzt man nun

$$lf(x) = la_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots = g(x), \tag{3}$$

so ist

$$e^{g(x)} = f(x);$$

woraus man wegen der beständigen Convergenz der e^g-Reihe schliefst, dafs die Gleichung (3) genau soweit gilt, als die Reihe $g(x)$ convergirt. Es besteht ferner für alle Werthe von x, die innerhalb der Convergenzbereiche der beiden Potenzreihen $f(x)$, $g(x)$ liegen, die der Gleichung (2) entsprechende

$$f(x) \cdot g'(x) = f'(x),$$

woraus die Coefficienten $b_1, b_2 \ldots$ recurrirend bestimmt werden können:

$$n a_0 b_n + (n-1) a_1 b_{n-1} + \ldots + a_{n-1} b_1 = n a_n \quad (n = 1, 2 \ldots).$$

Beispiel. $\log(x + \sqrt{1+x^2})$, die Wurzel positiv gedacht. Hier ist

$$f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \frac{f'(x)}{f(x)} = g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Setzt man die binomische Reihe für $(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$, so folgt $b_{2k} = 0$ und

$$(2k+1)\, b_{2k+1} = \binom{-\frac{1}{2}}{k} = (-1)^k \frac{1 \cdot 3 \ldots (2k-1)}{2 \cdot 4 \ldots 2k}$$

$$(k = 0, 1, 2 \ldots),$$

$$-\frac{b_{2k+1}}{b_{2k-1}} = \frac{(2k-1)^2}{2k(2k+1)} = \left(1 - \frac{1}{2k}\right)^2 : \left(1 + \frac{1}{2k}\right)$$

$$= 1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{k} + \ldots$$

Das Convergenzintervall der Reihe $g(x)$ ist somit $(-1, +1)$ und man hat für alle Werthe $-1 < x \leqq +1$

$$\log(x + \sqrt{1+x^2}) = x - \frac{1}{2 \cdot 3} x^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} x^5 - \ldots$$

c) Der allgemeine polynomische Satz.[9]) Es soll unter Voraussetzung, dafs $a_0 > 0$, $f(x)^\mu$ nach Potenzen von x entwickelt werden. Da

$$f(x)^\mu = e^{\mu l f(x)} = a_0^{\ \mu} \cdot \left\{ 1 + \frac{f(x) - a_0}{a_0} \right\}^\mu, \tag{4}$$

so erhellt sofort, dafs die Entwickelung möglich ist für die Werthe $|x| < K$. Ist demnach

$$f(x)^\mu = a_0^\mu(1 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots) = a_0^\mu g(x),$$

so hat man wie in a)

$$\{f(x) + hf'(x) + \dots\}^\mu = a_0^\mu(g(x) + hg'(x) + \dots),$$

also

$$g(x) \cdot \frac{\mu f'(x)}{f(x)} = g'(x).$$

Hierbei ist aber auch vorausgesetzt, dafs $f(x) > 0$ sei, was für die Werthe $-K < x < K$ in der That der Fall ist. Aus der Gleichung

$$\mu g(x) \cdot f'(x) = g'(x) f(x)$$

folgen Recursionsformeln für die $b_1, b_2 \dots$,

$$\mu(na_n + (n-1)a_{n-1}b_1 + \dots + 2a_2 b_{n-2} + a_1 b_{n-1})$$
$$= a_{n-1}b_1 + 2a_{n-2}b_2 + \dots + (n-1)a_1 b_{n-1} + na_0 b_n$$
$$(n = 1, 2 \dots)$$

oder

$$na_0 b_n + (n-1-\mu)a_1 b_{n-1} + (n-2-2\mu)a_2 b_{n-2} + \dots$$
$$+ \{1-(n-1)\mu\} a_{n-1} b_1 = n\mu a_n.$$

Auch independente Formeln für die b_n lassen sich leicht ableiten. Aus der Formel (4)

$$g(x) = \left[1 + \frac{f(x) - a_0}{a_0}\right]^\mu = 1 + \sum_1^\infty {}_r \binom{\mu}{r} \left(\frac{f(x) - a_0}{a_0}\right)^r,$$

worin

$$\frac{f(x) - a_0}{a_0} = \frac{a_1}{a_0} x + \frac{a_2}{a_0} x^2 + \dots + \frac{a_n}{a_0} x^n + x^{n+1} R_n(x),$$

folgt, dafs x^n nur aus solchen Gliedern kommen kann, wofür $r \leq n$. Und auch in diesen Gliedern stammt x^n nur aus der Potenz

$$\left[\frac{a_1}{a_0} x + \frac{a_2}{a_0} x^2 + \dots + \frac{a_n}{a_0} x^n\right]^r.$$

Man findet demnach nach dem polynomischen Satze für ganze positive

Exponenten (VIII. 3), wenn $p_1 \ldots p_n$ ganze Zahlen bedeuten, jede der Werthe 0 bis n fähig,

$$b_n = \sum_1^n {}^r \binom{\mu}{r} \sum \frac{r!}{p_1!\, p_2! \ldots p_n!} \left(\frac{a_1}{a_0}\right)^{p_1} \left(\frac{a_2}{a_0}\right)^{p_2} \cdots \left(\frac{a_n}{a_0}\right)^{p_n}$$

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + \ldots + p_n = r \\ p_1 + 2p_2 + \ldots + np_n = n \end{cases}$$

oder

$$b_n = \sum \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-r+1)}{p_1!\, p_2! \ldots p_n!} \left(\frac{a_1}{a_0}\right)^{p_1} \left(\frac{a_2}{a_0}\right)^{p_2} \cdots \left(\frac{a_n}{a_0}\right)^{p_n}.$$

Anmerkungen und Zusätze.

Zum I. Abschnitte.

[1]) Vgl. Hankel, Zur Gesch. d. Math. 1874, p. 391.

[2]) H. Grafsmann, Lehrbuch d. Arithm. 1861, p. 1.

[3]) R. Grafsmann, Die Formenlehre od. Math. 1872, p. 8.

[4]) F. C. Hauber, Scholae logico-mathematicae 1825. § 291.

Zum II. Abschnitte.

[1]) Die Vergleichung der Vielheiten oder Anzahlen ist hervorgehoben von Weierstrafs (vgl. E. Kossak, d. Elem. d. Arithm. 1872, p. 16) und von E. Schröder, der insbesondere die i. T. angegebene Frage aufwarf (vgl. sein in diesem Abschnitte mehrmals benutztes Lehrbuch der Arithmetik und Algebra I. B. 1873, p. 8, 14).

[2]) Schröder, l. c. p. 219. Die zur Deutung von Ausdrücken, in denen keine Klammern vorkommen, aufgestellten Grundsätze, welche Schröder die erste und zweite Convention nennt, sind früher zu wenig beachtet worden. Beide sind bereits richtig angegeben in den Resultaten zur Aufgabensammlung von Bardey 1871, p. 2.

[3]) Nach Dirichlet's Vorlesungen üb. Zahlentheorie hrsg. v. Dedekind § 3—8.

Zum III. Abschnitte.

[1]) Die Nr. 1—9 durchgeführte Untersuchung rührt mit Ausnahme der darin vorkommenden Vergleichungen im Wesentlichen von Hankel her, welcher den formalen Gebrauch der Begriffe „grösser, kleiner" nicht zuliess (vgl. Theorie d. complexen Zahlensysteme 1867 § 4, 5 und p. 46). Hankel benutzt für die allgemeine Thesis und Lysis die fremdartigen und schleppenden Bezeichnungen $\Theta(a, b)$, $\lambda(a, b)$, wofür Hoüel (Mém. d. l. soc. d. Bordeaux 2. s. I, p. 5) $a \frown b$, $a \smile b$ setzt. Die letztere habe ich beibehalten. — Eigene Bezeichnungen sind dem Gebrauche von $+$ $-$ oder . : im allgemeinen Sinne vorzuziehen.

[2]) Das arithmetische Mittel zweier rationalen Zahlen $\frac{1}{2}(A + B)$ ist eine commutative, aber nicht associative Thesis. Denn es sind die Zahlen

$$(A \circ B) \circ \Gamma = \tfrac{1}{2}\left\{\frac{A+B}{2} + \Gamma\right\}$$

$$A \circ (B \circ \Gamma) = \tfrac{1}{2}\left\{A + \frac{B+\Gamma}{2}\right\}$$

nur dann gleich, wenn $A = \Gamma$. (Hankel l. c. p. 21.)

[3]) Der Beweis nach Dirichlet (l. c. § 2). Die dabei angewandte Methode ist die Induction, zu einer Beweisart erhoben durch ein „dem Schlusse von n auf $n + 1$" (vgl. z. B. VIII. 3) ähnliches Verfahren.

[3*]) Wenn die Verknüpfung $\circ$ associativ ist, so ist die durch Verknüpfung von n gleichen Grössen a erzeugte Grösse $a \circ a \circ \ldots a$ durch die Grösse a und den Wiederholungsindex n vollständig bestimmt. Sonst wäre es ungewiss, ob die Grössen $(a \circ a) \circ a$ $a \circ (a \circ a)$ gleich sind und wenn das auch der Fall wäre, ob $(a \circ a \circ a) \circ a$ und $(a \circ a) \circ (a \circ a)$ gleich sind u. s. f. Die Begriffe des Vielfachen na (II. 6) und der Potenz a^n (II. 9) setzen voraus, dass die Addition, bezw. Multiplication associativ sind.

[3**]) Denkt man sich $(a \circ m) \smile (b \circ m)$ gegeben, so gilt die Gleichung

$$(a \circ m) \smile (b \circ m) = a \smile b$$

sicher nur dann, wenn ausser der Möglichkeit dieser beiden lytischen Symbole noch die des Ausdruckes $(a \circ m) \smile m$ feststeht.

[4]) Hankel l. c. p. 32.

[5]) Hankel l. c. p. 26. Wir heben noch ausdrücklich hervor, dafs Gleichungen wie z. B.

$$1 - 2 = 3 - 4 \qquad 1:2 = 2:4$$

auf dem formalen Standpunkte sich nicht beweisen lassen.

[6]) Der anderen Anordnung ist Hankel gefolgt (l. c. § 10, 11). Um diese Darstellung zu erhalten, hat man eigentlich nichts weiter zu thun, als die Theile I III einer- und II IV andererseits unter einander zu vertauschen. — Der Gedanke, die rationalen Zahlen auf rein formale Weise zu definiren, wurde in Deutschland wohl zuerst von M. Ohm durchgeführt (vgl. Versuch e. vollk. conseq. Systems d. Math. 1822 I. p. 37 ff.).

[7]) Nach H. Grafsmann, Lehrbuch d. Arithm. Nr. 53 und Hankel l. c. § 9.

[8]) Zum Theil nach Hankel l. c. § 12.

Zum IV. Abschnitte.

[1]) Vgl. P. du Bois Reymond, allgemeine Functionentheorie I. 1882, p. 52.

[2]) Man erhält die Regel über das Zeichen der Producte, nachdem man den positiven Drehungssinn für die Winkel und Flächen in der Ebene festgesetzt hat. Dem Rechtecke $ABCD$ (hier mit rationalen Seiten) entspreche eine positive oder negative Zahl, je nachdem der Umlauf längs des Umfanges in der vorgeschriebenen Richtung $ABCD$ einem im Innern des Rechteckes befindlichen Beobachter positiv oder negativ erscheint. Bezeichnet man nun eine der Richtungen (a) in der Geraden AB als positiv und bestimmt in BC die positive Richtung b so, dafs der Winkel $a \frown b = +90^0$, so braucht man nur als Product $AB \,.\, BC$ das Rechteck $ABCD$ mit seinem Zeichen aufzustellen.

Zum V. Abschnitte.

[1]) Dafs III. aus I. und II. nicht folgen kann, lehrt die folgende Bemerkung. Läfst man aus der endlosen Reihe der natürlichen Zahlen den Anfang (1 bis zu einer beliebigen Zahl) weg, so entsteht ein Gröfsensystem, das den Forde-

rungen I. und II. noch genügt. Gleichwohl wird die Gleichung $b + x = a$ nicht immer durch eine Gröfse dieses Systemes befriedigt.

[2]) Vgl. Archimedes de sphaera et cylindro I. postul. 5 und die Vorrede zur Schrift de quadratura parabolae.

[3]) Euclid Elem. X. prop. 1—3.

[4]) Die Darstellung in Euclid's Elementen ist nicht ganz gleichartig. So findet man neben dem 1. Grundsatze: „Was einem und demselben gleich ist, ist einander gleich" im 5. Buche bewiesen den Satz (prop. 11): „Verhältnisse, die einem und demselben Verhältnisse gleich sind, sind einander gleich." Allerdings bezeichnet Euclid die Verhältnisse in einer Proportion niemals als *ἴσοι*, sondern immer als *οἱ αὐτοί*. Jedoch schon im Alterthume wurde neben *ταυτότης* auch *ἰσότης τῶν λόγων* gebraucht (vgl. Hankel, z. Gesch. d. Math. p. 395). — Consequenter verfuhr Apollonius, welcher mittelst des 7. Grundsatzes den 1. bewies. Näheres darüber in zwei Aufsätzen von P. Tannery (Darboux Bulletin XVI. 1, p. 124 und XIX. 1, p. 162).

[5]) Die Annahmen 13) und 14) können hier dadurch vermieden werden, dafs man die Winkel durch concentrische Kreisbögen ersetzt.

Statt die Winkel, wie i. T. angenommen ist, als abstracte Gröfsen aufzufassen (d. h. lediglich die Ausdrucksweise festzusetzen, dafs, wenn die Punkte A, B, C nicht in einer Geraden liegen, die Halbstrahlen BA und BC einen Winkel bilden), kann man auch die unbegrenzten Winkelflächen ABC der als nicht geschlossen vorausgesetzten Ebene als Gröfsen einführen. Die Vergleichung je zweier ABC, $A'B'C'$ wird vollzogen, indem man die Scheitel BB' und irgend zwei Schenkel BA, $B'A'$ aufeinanderlegt. Fallen dann auch die anderen Schenkel BC, $B'C'$ in eine Gerade, so heifsen die Winkelflächen ABC, $A'B'C'$ einander gleich; fällt $B'C'$ innerhalb ABC, so heifst ABC die gröfsere Winkelfläche. Man hat geglaubt, mit Hilfe dieses Gröfsensystemes das Parallelenaxiom beweisen zu können, d. i. den Satz: „Nimmt man auf derselben Seite der Geraden ABB' die Punkte CC' so an, dafs $\angle ABC = AB'C'$ und zieht innerhalb der Winkelfläche $BB'C'$ eine Gerade $B'D$, so mufs sie BC schneiden." Dann wäre das nicht der Fall, so müfste die Winkelfläche $BB'D$ kleiner als die Winkelfläche $AB'C'$ und vermöge des 8. Grundsatzes gröfser als die der letzteren gleiche ABC sein. Es entspricht jedoch nur die erste Behauptung der obigen Festsetzung, die zweite widerspricht ihr geradezu; so dafs kein Beweis zu Stande gebracht ist. Gegen die ältere Darstellung von Bertrand, welche auf die Vergleichung von Winkelflächen ABC und Streifen $CBB'C'$ gegründet ist, läfst sich Folgendes einwenden. Um die Vergleichung überhaupt zu bewerkstelligen, müfste man von vorneherein die Annahme der Gaufs'schen Geometrie machen, dafs es innerhalb des $\angle AB'C'$ Halbstrahlen gebe, die BC nicht schneiden.

[7]) Der Beweis dieses Hilfssatzes beruht auf folgenden, aus dem Vorhergehenden abzuleitenden Sätzen. 1) „Dreiecke von gleichen Grundlinien und Höhen sind gleich. 2) Das Trapez ist gleich einem Dreiecke, dessen Grundlinie gleich der Summe der beiden parallelen Seiten des Trapezes und dessen Höhe gleich der Höhe desselben. 3) Das auf einer Parallelen zur Grundlinie AB des Dreieckes ABC durch die beiden anderen Seiten bestimmte Stück PQ wird durch die Verbindungslinie des Scheitels C mit dem Mittelpunkte D der Grundlinie halbirt." — Der letzte Satz wird indirect gezeigt. Ist S der Mittelpunkt von PQ, so müssen nach 1) und 2) die $ADSCA$ und $DBCSD$ einander gleich sein. Würde nun S nicht in CD liegen, sondern z. B. auf derselben Seite davon wie P, so wäre die erste der soeben genannten Figuren kleiner, die zweite gröfser als das Dreieck ADC, was sich mit ihrer Gleichheit nicht verträgt.

Dieses vorausgesetzt, denke man sich in der i. T. befindlichen Figur durch O die Gerade $QR \parallel BC$ gezogen, die HK in S schneidet. Wegen $DR = RC$ ist $MS = SE$ und $HM = EK$, also wegen $EK = FB$, $HM = FB$, somit $FH \parallel BD$. Ebenso folgt aus $MK = HE$ $HE = DG$, $MK = DG$ und $KG \parallel BD$.

[8]) Handelt es sich um die Vergleichung zweier gleichartigen Gröfsen AB, deren Beziehung nicht mehr nach Nr. 5

oder einem damit äquivalenten Verfahren herauszubringen ist, so sucht man für jede derselben zwei Reihen von solchen mit ihnen gleichartigen Gröfsen, die sich auf die genannte Art vergleichen lassen und zwar die eine bestehend aus Gröfsen, welche kleiner, die andere aus Gröfsen, welche gröfser sind als A bezw. B. Es sei also

$$C_m < A < D_n, \qquad E_m < B < F_n, \quad \left.\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right\} = 1, 2 \ldots .$$

Die Gröfsenreihen C_1, C_2 ... u. s. w. sind ferner so zu wählen, dafs zu jeder mit $A\,B$ gleichartigen Gröfse E Werthe $m\,n$ gehören derart, dafs sowohl $D_n - C_m < E$ als auch $F_n - E_m < E$. Wenn nun für zwei bestimmte Werthe von $m\,n$ $D_n \leq E_m$ bezw. $F_n \leq C_m$, so weifs man, dafs $A < B$ bezw. $A > B$. Ist aber, wie auch $m\,n$ gewählt werden, stets $D_n > E_m$ und $F_n > C_m$, so ist $A = B$. Angenommen nämlich, es sei $A > B$. Man hat dann

$$A - B < D_n - E_m.$$

Da bei passender Wahl von $m\,n$

$$D_n < C_m + E \quad \text{und} \quad E_m > F_n - E > C_m - E,$$

so folgt $A - B < 2E$, mithin wegen der Willkürlichkeit von E, $A \leq B$. Auf ähnliche Weise ergiebt sich $B < A$, somit mufs $A = B$ sein.

Solche Gröfsen $C_m\,D_n$ findet man mittelst des 8. Grundsatzes von Euclid oder der Annahmen des Archimedes im 1. Buch der Schrift de sphaera et cylindro (die von uns in Nr. 1 erwähnte fünfte abgerechnet) d. i. der Sätze: „Unter allen Linien, welche dieselben Endpunkte haben, ist die Gerade die kürzeste“ u. s. w. Sind $A\,B$ z. B. ebene Flächen, von denen eine krummlinig begrenzt ist, so müssen die C_m u. s. w. Polygone sein.

[9]) Ein solches Beispiel habe ich angegeben Math. Annalen XVIII, p. 276. — Die Methode der Alten kann in der Anwendung niemals zu Widersprüchen führen, während, wie H. Schwarz bemerkt hat (vgl. Hermite, Cours 2. édit. 1883, p. 35), die Methode der Grenzwerthe nicht ohne Einschränkung benutzt werden darf.

[10]) Vgl. Bolzano, die drey Probleme u. s. w. (1817) § 11—25.

[11]) G. Cantor hat in den Math. Annalen XXI, p. 576 eine stetige Gröſsenmenge durch „zusammenhängend und perfect" erklärt. Mit dem ersteren Prädicate stimmt mein späteres (a. a. O. XXII, p. 509) „allenthalben überall-dicht" überein, mit dem letzteren das von R. Dedekind (vgl. Stetigkeit und irrationale Zahlen 1872) zuerst hervorgehobene, in die i. T. gegebene Definition eines stetigen Gröſsensystemes an zweiter Stelle aufgenommene Merkmal.

Zum VI. Abschnitte.

[1]) Eine Verwechslung des Verhältnisses $A:B$ mit einem Quotienten ist nicht zu befürchten, da von der Division der allgemeinen absoluten Gröſsen nicht die Rede sein wird.

[2]) Wenn man sich auf die Verhältnisse der Strecken beschränkt, so kann man mit R. Hoppe (Archiv d. Math. 62. Bd., p. 162) $A:B$ und $A':B'$ als einander gleich erklären, wenn das Rechteck aus den Seiten $A\,B'$ (nach V. 5) gleich ist dem aus den Seiten $A'\,B$. Eleganter setzte H. Graſsmann (Ausdehnungslehre 1844, 2. Aufl., p. 111) als Bedingung der Gleichheit dieser Verhältnisse fest, daſs, wenn man von zwei Punkten die Strecken $A\,B$ einer- und die Strecken $A'\,B'$ andererseits nach derselben Seite parallel legt, die Verbindungslinie der Endpunkte von $A\,A'$ parallel sein soll der von $B\,B'$.

Bei Vergleichung von Verhältnissen wird manchmal das Zeichen : : anstatt = gebraucht.

Man bemerke noch die Sätze (Eucl. El. X. prop. 5, 6): „Commensurabele Gröſsen $A\,B$ verhalten sich wie natürliche Zahlen $a\,b$, und umgekehrt: verhalten sich natürliche Zahlen $a\,b$ wie Gröſsen $A\,B$, so sind die letzteren commensurabel." Denn wenn $A = aM$, $B = bM$, so hat man, falls $m\,n$ nur so gewählt sind, daſs $mA \gtreqless nB$, entsprechend $ma \gtreqless nb$, d. i. $A:B = a:b$. Und aus den entsprechenden Relationen $ma \lesseqgtr nb$, $mA \gtreqless nB$ folgt nach dem Satze i. T. wegen $ba = ab$ auch $bA = aB$. Wird $A = aM$ gesetzt, so ist mithin $B = bM$. — Somit können sich incommensurabele Gröſsen nicht verhalten wie Zahlen.

[3]) Die eingeklammerten Verweise beziehen sich auf die

Sätze des 5. Buches der Euclid'schen Elemente. Hinsichtlich der Ungleichungen unter den Verhältnissen vgl. die Dissertation von C. F. Hauber: Propositionum de rationibus inter se diversis demonstrationes etc. Tubingae 1793. — Die Sätze in Nr. 4, 5 sind nach Euclid's Vorgang begründet, ohne vom Satze in Nr. 6 Gebrauch zu machen. Fügt man zu den in Nr. 4 noch den folgenden: „Aus

$$A : M = A' : M', \qquad B : M > B' : M'$$

folgt

$$(A + B) : M > (A' + B') : M' \text{“}$$

der mit dem 7. und 11. Satze so zusammenhängt, wie der 17. mit dem 6. und 10., und läfst die Sätze 8, 14, 15 weg; so hat man von den Sätzen, welche bei Begründung des Rechnens mit den Verhältnissen nothwendig sind, diejenigen beisammen, welche auf dem soeben bezeichneten Wege zu erlangen sind.

[4]) Darf man von der hier benutzten Definition des stetigen Gröfsensystemes keinen Gebrauch machen, so wird der Satz von Nr. 6 manchmal als Grundsatz aufzustellen sein. Als solcher kommt er vor in Euclid's Elem. z. B. XII. prop. 2 und liegt seinem Begriffe des zusammengesetzten Verhältnisses zu Grunde. An der ersteren Stelle hätte die Geometrie der Alten davon absehen können, wie C. F. Pfleiderer (de dimensione circuli Pars II. (1790) § 48) und auf eine andere Art der Verfasser (Math. Annalen XXII, p. 517) gezeigt hat.

[5]) Euclid. Elem. VI. Def. 5. Der 1. und 3. der folgenden Sätze bei R. Simson, The Elements of Euclid 1767, p. 143. — Bei Zusammensetzung der reducirten Verhältnisse von ganzen Zahlen $a : b$, $c : d$ mufs das vermittelnde Glied m ein gemeinschaftliches Vielfache von $b\ c$ sein.

[6]) Die Zusammensetzung der Verhältnisse scheint manchmal als eine Addition aufgefafst worden zu sein. Dann würden aber nicht durchweg dieselben Sätze gelten, wie für die natürlichen Zahlen. Man hat nämlich

$$(A : B)\,(B : C) < A : B,$$

wenn $B < C$.

[7]) Vgl. Beiträge zur Geometrie der Lage. 2. Heft. 1857.

Zum VII. Abschnitte.

[1]) Über Weierstraſs's Theorie geben Aufschluſs E. Kossak (die Elemente der Arithmetik 1872) und S. Pincherle (Saggio di una introduzione alla teoria delle funzioni analitiche secondo i principii del Prof. W. in Battaglini G. XVIII). — G. Cantor, Math. Annalen V, p. 123, XXI, p. 564. Heine, Borchardt J. LXXIV, p. 172. — Dedekind s. V. Note [11]).

[2]) Die Formulirung des Satzes setzt voraus, daſs auch der Null ein absoluter Betrag, nämlich 0, beigelegt sei (vgl. III. 13). Es kann also für gewisse Werthe von n φ_n auch $= \alpha$ sein.

[2*]) Man kann sich, wie P. du Bois-Reymond bemerkt hat (Allg. Functionentheorie I, p. 55) darauf beschränken, die systematischen Zahlen (S_n) zu postuliren. Die Existenz einer solchen Zahl muſs auf die Kenntniſs jeder beliebigen Anzahl von Stellen c_r gegründet werden. So sind Summe und Differenz zweier irrationalen Zahlen dadurch zu definiren, daſs man jede einzelne Stelle derselben aus den bekannten Stellen dieser Zahlen herleitet. Beim Producte wird das unbequem, so daſs man es wohl vorziehen wird, sofort die Existenz des allgemeinen φ_n (nach l. c. p. 260 oder Nr. 12 i. T.) zu erweisen und dann zu der i. T. vorgetragenen Theorie überzugehen.

[3]) Auch die Formulirung dieses, sowie des 1. Corollares in Nr. 7 beruht auf der in Note 2 erwähnten Voraussetzung. Ohne dieselbe müſste das letztere ähnlich lauten wie der Fundamentalsatz der Exhaustionsmethode in V. 4.

[4]) Da gezeigt ist, daſs $(\varphi_n) = \lim \varphi_n$ bei $\lim n = +\infty$, so können wir die Resultate der vier Species auch so schreiben:

$$\lim \varphi_n \pm \lim \psi_n = \lim (\varphi_n \pm \psi_n),$$

$$\lim \varphi_n \,.\, \lim \psi_n = \lim \varphi_n \psi_n$$

u. s. f. Hieraus erhellt, daſs der 3. Satz in Nr. 4 auch Geltung hat, wenn die darin vorkommenden Grenzwerthe irrational sind. Dabei denken wir uns φ_n, ψ_n wie bisher als rationale Zahlen. Die Ausdehnung dieses, sowie mehrerer unter den folgenden Sätzen auf den Fall, dafs die φ_n, ψ_n u. s. w. irrationale Zahlen bedeuten, wird im IX. 9 erfolgen.

[5]) Wie Gaufs (W. III, p. 242) berichtet, liefs v. Prasse in seinen logarithmischen Tafeln (1810) die letzte Ziffer eines jeden Logarithmen, wenn sie vergröfsert worden war, mit einer anderen Schrift setzen. Gaufs bemerkt auch, dafs diese Einrichtung dazu dienen kann, die Genauigkeit der Rechnung zu verdoppeln; empfiehlt sie und auch die von Babbage getroffene Einrichtung jedoch nicht, wenn man Logarithmentafeln von mehr Stellen zur Hand hat. Wie man die i. T. angeführte Verbesserung der Näherungswerthe bei logarithmischen Rechnungen verwerthen kann, zeigt Gernerth in seinen fünfstelligen g. Logarithmen (1866). Hinsichtlich der Theorie der „numerischen Annäherungen" verweisen wir auf Baltzer's Elemente der Math. I. Gem. Arith. §. 18 und die ausführlichen Darstellungen von Vieille (Théorie gén. des approximations num. 2. éd. 1854), Ruchonnet (Élémens de calcul approximativ 3. éd. 1880) u. A.

[6]) „Sind die Verhältnisse $A : B$ und $A' : B'$ im Sinne von Euclid einander gleich, so sind es auch die ihnen entsprechenden Zahlen $\mathfrak{p}$ $\mathfrak{p}'$." Denn wenn α_1 α_2 irgend zwei rationale Zahlen bedeuten derart, dafs

$$\alpha_1 B < A < \alpha_2 B,$$

so hat man auch

$$\alpha_1 B' < A' < \alpha_2 B',$$

d. h. neben

$$\alpha_1 < \mathfrak{p} < \alpha_2$$

ist stets

$$\alpha_1 < \mathfrak{p}' < \alpha_2,$$

so dafs $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}'$ sein mufs.

Zum VIII. Abschnitte.

[1]) Im ersten Theile wird unter dem Symbol $\sqrt[m]{a}$ stets die absolute Wurzel verstanden.

[2]) In Wahrheit sind freilich die Logarithmen von Napier von den natürlichen verschieden, vgl. S. Günther, Verm. Unters. z. Gesch. d. math. Wiss. 1872, p. 278.

[3]) Vgl. Klügel, Math. Wörterbuch III, p. 550.

[4]) Eine Tafel solcher Potenzen von 10 berechnete Kramp durch Ausziehen von Quadrat- und fünften Wurzeln. Correcter ist nach Gernerth (l. c. p. V) die Tafel im Handbuche der allgemeinen Arithmetik von Egen, welche G. in seine Sammlung aufnahm. Zur Berechnung solcher Tafeln würde sich die unendliche Reihe (5) in XI. 1 eignen, die nur die Kenntnifs von $l\,10$ voraussetzt.

Zum IX. Abschnitte.

[1]) Nach Weierstrafs, vgl. Pincherle l. c. p. 242. Im Wesentlichen schon bei Bolzano (Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes u. s. w. [d. i. des Satzes in Nr. 13] 1817, p. 41).

[2]) Die Vorschrift mufs von der Art sein, dafs man für einen gegebenen Werth von x jede arithmische Darstellung setzen kann, ohne dafs der ihm zugeordnete von y sich ändert, z. B. $a^{\frac{m}{n}}$ wird mit Hilfe der beiden ganzen Zahlen $m\,n$ definirt, jedoch so, dafs, wenn sie durch mk, nk ersetzt werden, eine Änderung nicht eintritt.

[3]) G. Cantor (Math. Annalen XXI, p. 546) unterscheidet das Unendliche in Nr. 4 als Eigentlich-Unendliches von dem in Nr. 1, dem Uneigentlich-Unendlichen.

[4]) Was unter dem Grenzwerthe einer (d. i. der unabhängigen) Veränderlichen zu verstehen sei, ist längst ausgemacht. Wenig bekannt erscheint dagegen in der älteren Literatur die genaue arithmetische Erklärung des Grenzwerthes einer Function, welche der Verfasser nach Weierstrafs gegeben hat. Sie findet sich auch bei Dini (Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali 1878, p. 22).

[5]) Es ist

$$g(x_0) > f(x)$$

für

$$a < x \leqq x_0.$$

Im Intervalle $(a,\, x_0')$ giebt es einen Werth x_1', wofür

$$f(x_1') > g(x_0') - \varepsilon.$$

Demnach ist

$$g(x_0) > g(x_0') - \varepsilon,$$

also nach VII. 7

$$g(x_0) \geqq g(x_0').$$

[6]) Vgl. Neue Lehrsätze über die Summen unendlicher Reihen (Antrittsprogramm); Allg. Functionentheorie p. 266.

[7]) Dieser Satz, von P. du Bois-Reymond in der „allgemeinen Functionentheorie“ das „Convergenzprincip“ genannt, findet sich schon bei Bolzano (l. c. § 7).

[8]) Der Satz folgt daraus, dafs man jede algebraische Function von x nach steigenden, ganzen oder gebrochenen Potenzen von $x - a$ entwickeln kann.

[9]) Die Sätze wurden von mir durch Verallgemeinerung eines Cauchy'schen Satzes gefunden, vgl. Math. Annalen XIV, p. 231. Sie lassen sich wieder dahin verallgemeinern, daſs, wenn die obere (untere) Unbestimmtheitsgrenze von

$$\frac{f(n+1)-f(n)}{\varphi(n+1)-\varphi(n)}$$

bei $\lim n = +\infty$ eine endliche Zahl $O(U)$ ist, die entsprechende Unbestimmtheitsgrenze $O'(U')$ von $f(n):\varphi(n)$ bei $\lim n = +\infty$, falls sie überhaupt endlich ist, nicht gröſser (kleiner) als $O(U)$ sein kann.

[10]) Bolzano l. c. p. 11.

[11]) Ist eine Function $f(x)$ für alle Werthe von x im Intervalle $(a-d,\ a+d)$, $x=a$ eingeschlossen, definirt, so gelangt man durch Übertragung der Betrachtungen in Nr. 7 auf die Intervalle $(a-\xi,\ a+\xi)$ von x zu Unbestimmtheitsgrenzen $f(x)$ bei $\lim x = a$ [wobei freilich auch der Werth $f(a)$ berücksichtigt ist]. Mittelst derselben kann die Unstetigkeit von $f(x)$ für den Werth $x=a$ auch so charakterisirt werden: von diesen Unbestimmtheitsgrenzen ist entweder mindestens eine unendlich oder, wenn beide endliche Zahlen O, U sind, so müssen sie ungleich sein. Im letzteren Falle heiſst $O-U$ der Sprung von $f(x)$ für $x=a$.

[12]) Beweis nach Bolzano l. c. Einen anderen Beweis des Satzes findet man bei Cauchy (Cours d'Analyse p. 549).

[13]) Die Sätze von Nr. 15 rühren von Weierstraſs her. Die Beweise sind zu finden bei Pincherle l. c. p. 249 und Dini l. c. p. 51.

[14]) Der auch aus den Vorlesungen von Weierstraſs bekannte Satz findet sich bei Dini l. c. p. 49; Beweis nach Lüroth (Math. Ann. VI, p. 319). Einen anderen Beweis giebt Darboux (Ann. de l'Éc. norm. 2. sér. IV, p. 73).

[15]) Vgl. Borchardt J., 84. B., p. 245.

[16]) Nach Weierstraſs (vgl. Pincherle l. c. p. 246).

[17]) Cauchy, Cours d'Analyse p. 41.

[18]) Eine ausführlichere Darstellung hat der Verfasser in den Ber. d. naturw.-medic. Vereines in Innsbruck XIV. Jgg. p. 21—43 gegeben.

[19]) Die in einem Intervalle $(a,\ a+d)$ — $d>0$ — einsinnigen Functionen, d. h. hier diejenigen, welche, während x von $x=a$ an wächst, nicht abnehmen, bilden kein System von den verlangten Eigenschaften. Denn es giebt darunter solche, deren Quotient keinen Grenzwerth hat. Vgl. Math. Annalen XIV, p. 252.

[20]) Vgl. Princip. philosoph. nat. math. lib. II. lem. II.

[21]) Die 2. und 3. Definition sind in ähnlichem Sinne von P. du Bois-Reymond gebraucht (Borchardt J. 70. B. p. 27). — Die Bezeichnung: „Ordnung des Unendlichklein-Werdens" ist auf die $\mathfrak{u}(f)$ nicht anwendbar.

[22]) Vgl. insbesondere Math. Annalen XI, p. 146. Daselbst finden sich u. A. die soeben benutzten Functionen g_n.

Zum X. Abschnitte.

[1]) Der Fehlschlufs über die unendliche geometrische Progression begegnet noch immer. Man sagt: „Es sei

$$1 + x + x^2 + \cdots = s.$$

Dann ist

$$x + x^2 + x^3 + \cdots = xs,$$

also

$$1 = (1 - x)s, \qquad s = 1 : (1 - x).$$

Somit ergiebt sich für $x = -1$ $s = \frac{1}{2}$, so dafs

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = 0 + 0 + \cdots = \tfrac{1}{2}$$

ist." Durch die letzte Formel erklärte Guido Grandi die Schöpfung der Welt aus Nichts. — Der Fehler besteht darin, dafs der Ausdruck

$$1 + x + x^2 + \cdots$$

ohne Weiteres als reelle Zahl betrachtet wird.

[2]) Stern, Algebr. Analysis 1860, p. 63.

[3]) Vgl. Abel, Oeuvres par Sylow et Lie. I, p. 399.

[4]) Nach Weierstrafs (vgl. Pincherle l. c. p. 215).

[5]) Cauchy, Cours d'Analyse p. 141.

[5*]) Cauchy l. c. p. 144. Dafs die Glieder abwechselnd positiv und negativ sind und bei $\lim n = +\infty$ den Grenzwerth 0 haben, ist zur Convergenz der Reihe nicht ausreichend. So divergirt (10) i. T., wenn man setzt

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^n}{n}.$$

[6]) Dirichlet in den Abh. d. Berliner Acad. v. Jahre 1837.

[7]) Es ist $a = l\,2$. Vgl. XI. 5.

[8]) Riemann, Werke p. 221. Dini, Fondamenti p. 98. Man kann auch zeigen, dafs sich die Glieder a_n so ordnen lassen, dafs die Reihe Σa_n einen unendlichen Grenzwerth hat oder zwischen gegebenen Unbestimmtheitsgrenzen bei $\lim n = +\infty$ oscillirt. Genügen die Zahlen $K_1\, K_2 \cdots$ den Bedingungen

$$0 \leqq K_0 \geqq K_1 \qquad K_1 \leqq K_2 \qquad K_2 \geqq K_3 \qquad K_3 \leqq K_4$$

u. s. w.; so lassen sich die Glieder $b_r\, c_s$ so aneinander reihen, dafs die i. T. aufgeführten Partialsummen der Reihe nach

$$< K_0, \;\; > K_0; \;\; \geqq K_1, \;\; < K_1 \ldots$$

sind, nämlich

$$B_0 - b_{k_0} < K_0 < B_0$$

u. s. w. Nimmt man

$$K_0 = K_2 = K_4 = \cdots, \quad K_1 = K_3 = \cdots \quad \text{und} \quad K_0 > K_1,$$

so sind $K_0\, K_1$ die Unbestimmtheitsgrenzen der neuen Reihe. Läfst man

$$K_0 = K_1, \quad K_2 = K_3 \ldots \quad \text{und} \quad K_0\, K_2\, K_4 \ldots$$

Zahlen sein, die beständig und ins Unendliche wachsen, so ist der Grenzwerth der neuen Reihe $+\infty$.

Eine nähere Untersuchung über die Werthveränderungen bedingt convergirender Reihen bei Umstellung ihrer Glieder giebt A. Pringsheim, Math. Annalen XXII, p. 455.

[9]) Diese Eintheilung der convergenten unendlichen Reihen in zwei Classen verdankt man Dirichlet.

[10]) Abel, Oeuvres I, p. 222. Dirichlet, Zahl.-Th. 2. A. p. 371.

[11]) Nach Weierstrafs (vgl. Pincherle l. c. p. 221).

[12]) Cauchy, Cours d'Anal. p. 147.

[13]) Cauchy l. c. p. 541.

[14]) F. Arndt in Grnnert Arch. XI, p. 319.

[15]) Cauchy l. c. p. 539. Genau genommen, ist noch die Convergenz einer jeden Horizontal- und einer jeden Verticalreihe vorauszusetzen. — Auch die zweite Cauchy'sche Bedingung wird wohl zur Gleichheit der Grenzwerthe (17) i. T. nicht nothwendig sein.

[16]) Den Beweis dieses Satzes hat der Verfasser nebst einem Abrisse über die Theorie der Doppelreihen gegeben Math. Annal. XXIV, p. 157.

[17]) Abel, Oeuvres I, p. 226.

[18]) Dafs unter der i. T. angegebenen Bedingung die Reihe (20) zum Grenzwerthe ab convergire, hat Mertens gezeigt (Borchardt J. 79, p. 182). — Der Fall, dafs keine der beiden Reihen (19) absolut convergirt, ist betrachtet von A. Pringsheim (Math. Annal. XXI, p. 327) und A. Vofs (l. c. XXIV, p. 42).

[19]) Borchardt J. 76, p. 61—91.

[20]) Da $\log x$ nur definirt ist für $x > 0$, so $\log_2 x$ nur für $x > 1$, $\log_3 x$ nur für $x > B$, $\log_4 x$ nur für $x > B^B$ u. s. f.

[21]) Eine solche Reihe hat P. du Bois-Reymond (l. c. p. 88) angegeben.

[22]) O. Bonnet in Liouville J. VIII, p. 78.

[23]) Crelle J. XIII, p. 172. Man erhält die dort gegebene Form des Convergenzcriteriums, wenn man in (1)

$$\psi(n) = a_{n+k-1}\,\varphi(n)$$

setzt.

[24]) Die Folgen von logarithmischen Criterien zweiter Art gehen zurück auf Bertrand (Liouville J. VII, p. 35) und O. Bonnet l. c.

[25]) Ettinghausen, Zeitschr. X, p. 63.

[26]) Weierstrafs in Crelle J. 51, p. 28.

[27]) Gaufs, Werke III, p. 139.

[28]) Cauchy, Cours d'Anal. p. 131. Abel, Oeuvres I, p. 224. — Erst 1853 räumte Cauchy ein, dafs sein in Rede stehender Satz einzuschränken sei (vgl. Compt. rend. T. 36, p. 455).

[29]) Der zum Theorem V. von Abel l. c. gegebene Beweis wird vollständig, wenn die gleichmäfsige Convergenz der Reihe

$$v_0 + v_1\delta + v_2\delta^2 + \cdots,$$

wo $v_0, v_1, v_2 \ldots$ Functionen von x sind, für die Werthe $a \leq x < b$ vorausgesetzt wird.

[30]) Abh. d. Münchener Acad. II. Cl. V. 2. A., p. 380.

[31]) P. du Bois-Reymond l. c. XII. 1. A., p. 120. Das folgende Beispiel nach G. Cantor Math. Annalen XVI, p. 269.

[32]) Oeuvres I, p. 223.

[33]) W. Veltmann, Schlömilch Z. XXVII, p. 196.

[34]) O. Hölder, Math. Annalen XX, p. 536.

[35]) Résumés analytiques 1833, p. 65. Weierstraſs (Pincherle l. c. p. 339).

[36]) Das Convergenzintervall der Reihe (5) kann über $(-R, +R)$ hinausragen, wie schon die Gleichung

$$e^{l(1+x)} = 1 + x$$

zeigt, wenn man für e^y, $l(1+x)$ die im XI. Abschnitte angegebenen Reihen setzt.

[37]) Weierstraſs (Pincherle l. c. p. 340).

[38]) Cauchy erfand die im Folgenden benutzte Methode, um die Existenz der Integrale der Differentialgleichungen nachzuweisen. Vgl. (Nouv.) Exercices d'Analyse etc. I. (1840), p. 355.

[39]) Vgl. Lehmann, Grunert Arch. XXI, p. 123.

Zum XI. Abschnitte.

[1]) Cauchy, Cours d'Analyse p. 106.

[2]) Ohm, Versuch eines Systemes der Math. 1821. II, p. 302.

[3]) Der hier gegebene Beweis des binomischen Satzes rührt von Euler her (N. Comm. Acad. Petropol. XIX, p. 103).

[4]) H. Graſsmann, Arithmetik, p. 166. Die übrigen Sätze über die Quadrat- und Cubikwurzel nach Ruchonnet, Élém. d. calcul. approx. 3. éd. p. 35.

[5]) Lambert, Beiträge II, p. 152.

[6]) Cauchy, Cours d'Analyse p. 545.

[7]) Koralek, Méthode n. pr. calculer rapid. l. logarithm. etc. 1851.

[8]) R. Hoppe, Tafeln z. 30stellig. logarithm. Rechnung. 1876.

[9]) Euler, Instit. Calc. diff. II. § 202.

Berichtigungen.

S. 5, Z. 13 statt „simultan" l. „jedenfalls".
S. 31, Z. 7 v. u. statt b'' l. b".
S. 70, Z. 11 v. u. statt $A' + B$ l. $A' + B'$.
S. 96, Z. 14 statt „derselben" l. „desselben".
S. 121, Z. 10 statt „obenerw." l. „ebenerw."
S. 157, Z. 15 statt $f(\alpha)$ l. $f(x)$.
S. 208, Z. 2 v. u. statt „Satz (7) a. a. O." l. „folgende Satz".
S. 223, Z. 12 v. u. statt des zweiten $\sum\limits_{1}^{n-1}$ l. $\sum\limits_{0}^{n-1}$.
S. 268, Z. 13 statt p^λ l. n^λ.
S. 319, Z. 9 c_1 braucht nicht grösser als 8 zu sein.

S. 321, Z. 8 v. u. Nur wenn $n = 2$ und $a_2^{(1)} = 9$ ist, kann die erwähnte Differenz negativ sein. Dann ist stets $c_2 = 9$.